



INSTITUTO IBEROAMERICANO DE DESARROLLO EMPRESARIAL

DOCTORADO EN CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

TEORÍA DE NORMA EN EL MERCADO FINANCIERO PARA EL ARBITRAJE DE DIVISAS EN EL MERCADO FOREX

T E S I S

PARA OBTENER POR EL GRADO DE:

Doctora en Ciencias Administrativas

PRESENTA:

Jennifer López Chacón

DIRECTOR

Dr. Alfredo Raya Montaña

CODIRECTORA

Dra. Martha Beatriz Flores Romero

Morelia, Michoacán, 2023

*Puedo calcular el movimiento de las estrellas,
pero no la locura de los hombres.*

Sir Isaac Newton (1643-1727)

Agradecimientos

A Dios, por ser ese motor invisible que me ha dado una fuerza descomunal en los momentos más difíciles. A mis padres por estar conmigo en todo momento, por darme su apoyo, su amor incondicional, por forjar mi carácter, por darme valores, por enseñarme que la vida no es sencilla pero que al final de cada lucha hay una recompensa. A mis hermanas Jeza, Jocito y Tete por que sin ustedes niñas mi vida sería muy aburrida, me siento muy orgullosa de todo lo que han logrado y de poder verlas crecer. A mis abuelos Prisciliano, Teresa y María por dejarme un poco de su sabiduría, aunque ya no tengo la dicha de tener a todos junto a mi sé que desde donde estén, estarán felices por mi. A mis tías Melania, Minerva, Mireya y Sandra, por ser un apoyo y una motivación en mis planes desde que tengo memoria.

A mi asesor el doctor Alfredo Raya por aventurarse en este tema y tenerme fe, por todos los conocimientos y paciencia brindada durante este proyecto. A mi coasesora la doctora Martha Beatriz Flores, por todas sus enseñanzas y su apoyo durante todo el doctorado. Al doctor Federico González Santoyo por los aportes realizados en este trabajo de investigación. A Joaquin que siempre será mi maestro y colaborador favorito, gracias por creer en mi y sobre todo por ser un segundo padre.

A mis amigos Alexis, Alondra, Ángel, Champi, Chema, Elder, Felipe, Gabino, Grecia, Gustavo, Jacqui, Itzel, Raúl, Rogelio, Tafolla y Ulises, que han estado en todo este proceso de tesis, sobre todo durante la pandemia, sin el grupo de Kese va ser no sé que hubiera hecho, gracias por todas las historias y risas compartidas. A Ene, Marco, Rodrigo y Sonia que han estado en diferentes etapas de mi vida, gracias por todo su apoyo. Una mención honorífica a José Edelstein que con una anécdota regresó mi curiosidad por aprender más sobre el tema de esta tesis, gracias por esos días llenos de historias y física.

A mis amistades del krav maga y el ninjutsu Lupita, Sarita, Moshé y el sensei Pedro, por hacerme mantener la cordura durante estos años, por todo su apoyo, de verdad muchas gracias por ser una segunda familia para mi.

Luis, gracias por tu apoyo en todos los aspectos durante estos años, gracias por ayudarme a crecer y madurar, por apoyarme en todas mis aventuras, por creer en mi cuando nadie más lo hizo, sin ti no hubiese terminado esta tesis.

A mi Juanito que ya no está para ver como las flores volvieron a crecer, pero sé que estaría muy feliz por todas las cosas que he hecho desde la última tesis, no me cansaré de agradecer por estos once años que la vida nos cruzó.

A Adrián, por apoyarme en mis proyectos, por estar aún en los momentos donde parecía que no había tiempo, por demostrarme que los grandes cambios no se llevan años, pues basto estar un segundo junto a él para hacer una revolución en mi y de entre las batallas ganadas recuperar mi alegría, eres con quien deseo estar el tiempo que me quede este camino llamado vida.

Finalmente a Kirara, Ranma, Quimera y mi Baphomet que tanta alegría me han dado desde que aparecieron, yo sé que no saben leer pero me da satisfacción darles un pequeño reconocimiento por alegrarme durante todos estos años, Ranma siempre serás mi gatita favorita.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Jennifer López Chacón. Morelia, Michoacán, 2023

Resumen

La simetría de norma es uno de los pilares en los que reposa nuestro moderno entendimiento de las interacciones fundamentales en el celebrado Modelo Estándar de Partículas Elementales. Dicha simetría se enseña en cursos avanzados de física en el estudio de la electrodinámica, es decir, las ecuaciones de movimiento de campos electromagnéticos y sus fuentes. Las ecuaciones de Maxwell se resuelven directamente para dichos campos solo en ejemplos idealizados. El enfoque a través de los potenciales escalar y vectorial, particularmente de la libertad de elegirlos con cierta conveniencia, la llamada libertad de norma o de calibre, muchas veces se oscurece por el lenguaje matemático con el que se formula. Un ejemplo sencillo para entender la relevancia de la simetría de norma es el estudio del arbitraje de monedas, es decir, la oportunidad de obtener una ganancia intercambiando monedas en el mercado financiero. Esta tesis se enfoca en la teoría de norma como base para la descripción en la dinámica del mercado para el arbitraje de divisas.

Índice general

Índice de figuras	xii
Índice de tablas	xvi
1. Fundamentos de la investigación	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. Pregunta de la investigación	10
1.3. Objetivo de la investigación	10
1.4. Justificación	10
1.5. Método	12
1.6. Hipótesis de la investigación	12
2. Enfoque teórico de la oferta y la demanda en Forex	13
2.1. Sistema de tipo de cambio	13
2.1.1. Tipo de cambio real	14
2.1.2. Tipo de cambio fijo	14
2.1.3. Tipo de cambio flexible o flotante	15
2.1.4. Tipo de cambio bandas cambiarias	15
2.2. Oferta y demanda en el mercado de divisas	16
2.2.1. Ley de demanda	16
2.2.2. Ley de oferta	19

2.2.3. Ley de oferta y demanda	22
3. Interpretación física del mercado financiero	25
3.1. Mercado de divisas	25
3.2. Simetrías en la física	26
3.2.1. Simetrías	27
3.2.2. Simetría de Gauge	29
3.3. Interpretación física de un mercado financiero	39
3.4. Dinámica de arbitraje	55
3.4.1. Dinámica de comerciantes	60
3.4.2. Dinámica de comerciantes y arbitraje	67
4. Arbitraje de divisas	71
4.1. Haces fibrados	71
4.2. Transporte Paralelo	75
4.3. Curvatura	82
4.4. Electrodinámica Financiera	84
4.4.1. Arbitraje como curvatura	85
5. Casos de estudio	88
6. Metodología	97
7. Resultados	99
8. Conclusiones	104
Bibliografía	106

Índice de figuras

2.1. Curva de demanda de una divisa en el mercado Forex.	17
2.2. Representación de un desplazamiento hacia la derecha e izquierda en la curva de la demanda.	18
2.3. Curva de la oferta de una divisa en el mercado Forex.	20
2.4. Representación de un desplazamiento hacia la derecha e izquierda en la curva de la oferta.	21
2.5. Representación del equilibrio de la oferta y la demanda.	23
2.6. En la figura a) hay un exceso de oferta, mientras que en b) se muestra exceso de demanda.	24
3.1. Representación de una simetría correspondiente a una rotación de una pelota perfectamente esférica.	28
3.2. Representación en una tablero de bancos de diferentes países co- nectados entre sí.	30
3.3. Simetría de Gauge entre los viejos pesos y los nuevos pesos de México en 1993.	32
3.4. Equivalencias de monedas de los 80's con los nuevos pesos.	33

3.5. Representación de tres países con sus respectivas monedas. En los puentes verdes vemos los tipos de cambio correspondientes. Si se sigue el circuito por la línea azul, se ganará dinero; al seguir este circuito se tendría un factor de ganancia de 1.12 o ganancias del 12%.	34
3.6. Retículo de países en varias escalas. Se muestra un perspectiva de este mallado vista desde lejos. Si uno se aleja lo suficiente, puede ver toda la malla como un continuo.	36
3.7. La interacción electromagnética tiene las mismas simetrías que una configuración donde tenemos un círculo en cada punto del espacio-tiempo. Aquí cada punto del espacio-tiempo es donde se cruzan las líneas negras. Podemos pensar en el círculo como una dimensión interna extra.	37
3.8. Representación de los países dentro de una red bidimensional con la etiqueta $\vec{n} = (n_1, n_2)$	39
3.9. Representación del movimiento de un país inicial (Alemania) hacia un país vecino (Francia).	40
3.10. Representación del tipo de cambios entre dos países.	41
3.11. Representación del tipo de cambios entre \vec{n} y el país ubicado en $\vec{n} + \vec{e}_2$	41
3.12. Representación del tipo de cambios entre entre el país $\vec{n} + \vec{e}_2$ y el país $\vec{n} + \vec{e}_2 + \vec{e}_1$	42
3.13. Cambio de escala de una moneda local.	43
3.14. Transformación de Gauge en dos países.	44
3.15. Bucle en un cambio de divisas con oportunidad de arbitraje. . . .	46
3.16. Red de espacio-tiempo.	48
3.17. Conservación del producto.	57

ÍNDICE DE FIGURAS

3.18. Posición de un producto.	65
4.1. Plano bidimensional, donde el eje es la base, y las líneas ortogonales a él son las fibras.	72
4.2. Un haz libre general, consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B	73
4.3. Un tubo puede considerarse como un haz de fibras con base circular B y fibras lineales E . De forma alterna, también es posible verse como un haz de fibras con base lineal y fibras circulares.	74
4.4. Un haz libre general consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B	75
4.5. (a) Cualquier transporte paralelo global se construye a partir de una serie de transportes locales, (b) Cada uno de los transportes paralelos locales es aproximadamente el resultado de los transportes paralelos a lo largo de las direcciones principales en la base.	78
4.6. Reglas para el transporte paralelo sobre la esfera. La conexión definida por estas reglas es especial: es consistente con la métrica de la esfera, inducida por la incrustación en el espacio tridimensional.	80
4.7. Un haz libre general consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B	81
4.8. La curvatura esférica es responsable del transporte paralelo no trivial. Las mismas reglas de transporte paralelo aplicadas al caso del avión no producen rotación alguna.	83
4.9. Dos formas desde euros en el tiempo t a euros en el tiempo $t + dt$. Los diferentes resultados del transporte paralelo a lo largo de las curvas dan lugar a oportunidades de arbitraje.	86

6.1. Representación de de las ganancias obtenidas en el periodo del 1 de enero al 12 de junio.	98
7.1. Ajuste cosenoidal a las ganancias obtenidas, con función $Ae^{-x^2}(1 - BCos(c - t))$	100
7.2. Representación de E con la solución $e^{-x^2}(1 - 0.00004Cos(0.036 - 1.007t))$	101
7.3. Representación de ρ con $-2e^{-x^2}(1 - 0.00004Cos(0.036 - 1.007t))$	102
7.4. Representación de J con $-0.00004e^{-x^2}Sin(0.036 - 1.007t)$	103

Índice de tablas

1.1. Reservas de oro de los bancos centrales en millones de dólares. . .	8
--	---

Introducción

La física es una ciencia natural que estudia los fenómenos fundamentales del universo. La física, más que una ciencia teórica, es una ciencia experimental (39). Si bien es cierto que la física es una ciencia dura que no acepta supuestos a menos que también sean contrastados por experimentos, no necesariamente los desarrollos de la física teórica y experimental se realizan de manera simultánea; la mayoría de las veces, uno lleva al otro (5). Para las ciencias sociales, el poder matematizar fenómenos o crear modelos teóricos suele ser más complejo, pues muchas veces basta con moverse de contexto social para que una teoría propuesta no sea funcional o bien se dan propuestas de modelos con una gran cantidad de parámetros y variables, que los hacen matemáticamente complejos y poco eficientes.

La economía es parte de las ciencias sociales. Esta disciplina se enfoca en estudiar las leyes que rigen la producción, distribución y consumo tanto de bienes como de servicios, además de los modelos y sistemas económicos en los que se desarrollan diversas actividades económicas humanas. La econofísica utiliza modelos físicos en fenómenos económicos. Busca ser inductiva, además de ser fundamentada de forma empírica en observaciones. La econofísica no pretende reinterpretar datos empíricos para ajustarse a las expectativas de un modelo teórico, sino que describe los mecanismos por los cuales los sistemas económicos realmente evolu-

cionan a través del tiempo (35).

En esta tesis proponemos utilizar los principios de simetría de la teoría de norma para modelar el mercado de divisas, esto con la finalidad de poder predecir posteriormente las ganancias que se podrían obtener mediante el arbitraje de divisas.

En el primer Capítulo, abordamos los fundamentos en los que se basa esta investigación, así como la relevancia de la misma. En el Capítulo “Enfoque teórico de la oferta y la demanda en Forex”, se presenta la relación de la ley de oferta y demanda con la variación en el precio de las divisas, mientras que en el Capítulo tres se muestra la interpretación de un mercado financiero visto desde un punto de vista físico específicamente desde la simetría de Gauge y las leyes de Maxwell. Abordamos el arbitraje de divisas desde una perspectiva de la electrodinámica en el Capítulo cuatro. En el capítulo cinco se muestran todos los trabajos relacionados con el uso de la teoría de Gauge en mercados financieros. En el capítulo seis se describe la metodología utilizada para analizar el tipo de cambio euro-dólar del 1 de enero al 12 de junio del 2023. En el Capítulo siete, se presentan los resultados obtenidos y su interpretación. Finalmente, en el Capítulo ocho se dan las conclusiones obtenidas durante esta investigación.

Capítulo 1

Fundamentos de la investigación

1.1. Antecedentes

Las actividades económicas se dividen en tres fases: producción, distribución y consumo. Algunas actividades económicas son la agricultura, la ganadería, la industria, el comercio y las comunicaciones. Sin duda alguna, el comercio es una de las actividades económicas más importantes a nivel mundial (26). La humanidad comenzó a intercambiar bienes hace miles de años. Al comercializar bienes y servicios, se obtiene un beneficio, es decir, nuestra utilidad aumenta al generar este intercambio. Aristóteles (384-322 a.C.) describió el beneficio y la razón de ser del comercio como el intercambio de lo que se tiene de sobra para poder conseguir lo que a se necesita (33).

Entre las primeras formas de comercio encontramos al trueque, el cual consiste en el intercambio de objetos o servicios por otros equivalentes. Este tipo de comercio se diferencia de la compraventa habitual en el hecho no usar el dinero como forma de pago en la transacción. Sin embargo, este sistema tiene como limitante el hecho de que las transacciones anteriormente solían hacerse con mercancías perecederas, que son difíciles de almacenar. Por ello, se sustituyó esta forma de comercio por otros productos como piedras, cuentas, huesos o metales preciosos,

1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

que pueden considerarse como las primeras formas que tuvo el dinero (2).

Se puede definir al dinero como un conjunto de activos dentro de una economía. Estos activos son aceptados como forma de pago para comprar y vender bienes y/o servicios. El dinero es útil como medida de valor o como forma de reserva de riqueza que se encuentre respaldada por la autoridad o por un consenso social. Diferentes objetos han sido empleados por las sociedades tradicionales de todos los continentes (3).

A lo largo de la historia, han existido diversos objetos y materiales que se han usado como forma de dinero en diferentes civilizaciones. Aunque sus características no siempre coinciden, suelen tener en común ser cuantificables, transportables, homogéneos, conocidos e intercambiables. Por ello, minerales como la obsidiana o el sílex fungieron como forma de dinero, al igual que alimentos como lo son los cerdos, ovejas, bueyes, arroz, maíz, trigo, cocos, té, cacao, manteca, tabaco o almendras; las piedras, la pasta vítrea y las conchas como cauris también fueron usados como forma de pago en diversos continentes (13).

Sin duda alguna, los metales cuentan con una serie de cualidades que los convierte en candidatos para ser empleados como dinero. Al existir una cantidad finita de cualquier metal, se tiene una producción controlable. Por ende, tienen las características de ser cuantificables, transferibles, manejables y muy duraderas. El primer registro del uso de moneda fue en la costa griega de Asia Menor a finales del siglo VII a.C. y en China entre los siglos VII y II a.C. Estas primeras monedas estaban fabricadas a partir de electro, la cual era una aleación de oro y plata. Estas monedas eran acuñadas con martillo, con su peso y la marca de la autoridad emisora. Esta técnica sobreviviría hasta la Edad Moderna (13).

Después de la aparición de la primeras monedas, éstas proliferaron rápidamente en varios países alrededor del mundo debido a que monarcas, aristócratas, ciudades e instituciones empezaron a acuñar dinero con su sello identificativo con la finalidad de certificar la autenticidad del valor metálico de la moneda. La clave del éxito de las monedas se basa en el hecho de su carácter metálico. A continuación se describe el uso de metales como forma de dinero en diferentes periodos y continentes (13):

- **Oro:** La escasez, belleza, maleabilidad y resistencia del oro lo han convertido en un metal muy valioso a lo largo de la historia. El valor oficial del oro ha sido aproximadamente entre 12 y 15 veces superior al de la plata.
- **Plata:** Las monedas de plata fueron usadas por diferentes culturas occidentales e islámicas. La plata fue mezclada con cobre ocasionalmente, dando como resultado el vellón, que es una aleación que contiene en torno al 50 % de cobre y 50 % de plata. En caso de que el metal que predomine sea la plata, se conoce como vellón rico. Por el contrario, si predomina el cobre, se habla de vellón pobre. Sin embargo, esta aleación no gozó de excesivo éxito. La plata recortada fue usada como dinero en la Península Ibérica entre los siglos V y II a.C.
- **Cobre y bronce:** El cobre y el bronce han participado en los sistemas monetarios con un carácter fiduciario, el cual ha sido condicionado por el crédito y la confianza. Este valor es superior al real. Ejemplo de esto son las manillas, que fueron una de las formas de dinero más extendidas en África. Éstas se fabricaron en Europa desde el siglo XVI. Solían intercambiarse en las costas africanas por oro, marfil o esclavos.
- **Hierro:** El hierro fue en metal usado por varias culturas africanas, las cuales

1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

lo usaban en grandes formatos obtenidos por forja.

- **Plomo:** El uso del plomo como forma de dinero fue poco común, ejemplo de esto son las tesoras romanas, las cuales tenían formas y perfiles variados. La forma más conocida era la plancha laminada. También han sido encontradas algunas piezas del sureste asiático.

Como hemos visto anteriormente, el oro y la plata han sido metales muy importantes para la economía de distintos pueblos, pues sirvieron como base para la fabricación de monedas que les permitían comerciar de forma interna y con otros pueblos. El valor de cada moneda dependía del metal con el que estaba hecha, de sus diseños y tamaños, del valor del oro y la plata. El valor de las monedas hechas de oro y plata pura era ligeramente mayor al del metal mismo, pues contenían un coste de fabricación. Siglos después, surgieron nuevas aleaciones mucho más baratas y fáciles de conseguir, además del papel moneda. Con esto llegaba el sistema fiduciario (13).

Históricamente, el dinero (específicamente, en forma de moneda) era una mercancía cuyo valor dependía de la cantidad del metal del que estaban fundidas. El valor del dinero llamado fiduciario se regía por la confianza o fe que en éste tenía en la comunidad, debido a que un número impreso en un trozo de papel marcaba su valor; no estaba respaldado en metales precisos, ni en alguna forma de promesa de pago por parte de la entidad emisora (11). Durante varios años, este sistema conviviría con el patrón oro (24).

El registro de los primeros billetes es de China en el siglo VII. Éstos nacieron debido a la necesidad de reducir la circulación de metales. Sin embargo, esta medida temporal tuvo como consecuencia poder acumular una mayor cantidad de dinero en menos espacio, lo cual se convirtió en una solución para poder transpor-

tar grandes cantidades de dinero por todo el imperio. Con esta forma de dinero, una sola mula podía cargar el mismo valor que su equivalente en monedas para las que se necesitaría todo un convoy. El Estado Chino era el encargado de guardar el oro y la plata de los súbditos mientras que los metales eran usado únicamente por la clase dirigente. De forma oficial, el papel moneda se implantó en el año 812. Los ejemplares de billetes más antiguos conocidos son los *kuan*, los cuales fueron elaborados en corteza de morera (este árbol era usado para elaborar papel resistente) en el siglo XIV (24).

Aunque Marco Polo (1254-1324) llevó a Europa las noticias sobre el sistema monetario usado en China, no fue sino hasta el siglo XVII cuando se crearon los primeros billetes en este continente, específicamente en Suecia (24). Al introducir el papel moneda, aparecieron las primeras formas de billetes. Éstos eran certificados con cierto valor en oro. La relación entre el papel moneda y el oro fue llamada patrón oro. El patrón oro fue un sistema monetario en el cual los billetes podían ser intercambiado por oro y el oro por billetes, esto a una tasa de cambio fija (32).

Los gobiernos y las entidades bancarias autorizadas eran los únicos que tenían el poder de poner en circulación papel moneda. Esto en proporción con las reservas de metales preciosos con los que cada país contaba (postura conocida como *bullionismo*; un Bullion es oro o plata en barras), con la finalidad de evitar sobre-emisiones y las consecuencias económicas que eso implicaría. La Escuela Bancaria (*Banking School*) estudió ampliamente los fundamentos teóricos del patrón oro, pero desde 1821, Inglaterra se convertiría en el principal promotor de este sistema. Para 1900, casi todos los países del mundo habían adoptado el patrón oro (32).

Inglaterra se convirtió en el modelo de los demás bancos centrales, pues es-

1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

tos seguían al Banco de Inglaterra. Los bancos centrales coordinaban los ajustes de las condiciones crediticias a nivel mundial, lo cual era complicado en época de recesión, pues esto implicaba tomar medidas que apoyaran a los países que se encontraban en dificultades e incluso se podía recurrir a las reservas de otros países que tuvieran como sistema el patrón oro (32). En la Tabla 1.1 se muestran la reservas de oro de los bancos centrales durante el periodo 1913-1938, con conversión a la paridad de 20.67 dólares por onza de oro fino.

Tabla 1.1: Reservas de oro de los bancos centrales en millones de dólares.

Banco \ Año	1913	1918	1923	1928	1933	1938
Alemania	279	539	111	650	92	17
Estados Unidos	1290	2658	3834	3746	4012	8609
Francia	679	664	710	1254	3022	1529
Reino Unido	165	521	746	748	928	1587

Fuente: Elaboración propia con base en Nurkse (27).

Al término de la Primera Guerra Mundial y la Gran Depresión, el patrón oro dejó de ser usado. Éste fue sustituido por un sistema puramente fiduciario (32). Después de la Segunda Guerra Mundial, se estableció al dólar estadounidense como moneda referente a nivel global. El dólar tenía como garantía al oro. Sin embargo, en 1971 Richard Nixon deja por completo el respaldo del oro. Con ello, el dólar pasó a ser un elemento fiduciario, convirtiéndose en dinero fiat, es decir, que no tenía un valor intrínseco, pero sí un valor legal propio. Esta forma de dinero fiduciario tiene como característica el hecho de que su declaración es dada por el Estado como tal; este evento fue conocido como Nixon Shock (14).

Para 1973 se aceptó el uso de un sistema de cambio de tipo flotante, es decir, el valor de la divisa sería definido en relación a la oferta y la demanda de la misma. Con ello, se eliminaban las bandas de flotación. Sin embargo, los bancos centrales y los gobiernos podían intervenir de ser necesario para estabilizar las fluctuaciones extremas. Esto fue denominado como fluctuación sucia (6).

Hoy en día, el valor de los tipos de cambio por la fluctuación se determinan en el mercado de divisa. El dinero no cuenta con un respaldo en metales, activos u otro bien convertible sino que su valor es determinado por la confianza que se tiene en el Banco Central emisor (determinado por el entorno político-económico). Sin embargo, el dólar y el euro (como segunda moneda) son usados como reservas y determinan en su mayoría la liquidez del sistema (6).

Las reservas de divisas son activos financieros que el banco central invierte en el exterior. La principal característica de éstas es la liquidez, pues es la forma en la que se permite saldar de forma inmediata las obligaciones de pago fuera del país. La reserva de divisas que almacenan los países es un factor de peso en los tipos de cambio de su divisa nacional, pues se encuentra respaldada y de esta manera, a mayor cantidad de reserva disponible, la divisa nacional se fortalece en el mercado. En caso contrario, a menor reserva de divisas internacionales, la divisa nacional tiende a la devaluación (4). Cada país decide los niveles de reservas que desea mantener. Esta cantidad de reserva se calcula a base de variables macroeconómicas como lo es la balanza de pagos del país, la eficiente asignación de recursos, la rentabilidad y el régimen cambiario, entre otras variables.

Factores como la acumulación de capital, la estabilidad social y política, la

1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

mano de obra nacional, el desarrollo de tecnología, así como los tratados comerciales entre países permiten aumentar la productividad y generar avances económicos a nivel mundial. Dentro de esta dinámica se encuentra el mercado de divisas, pues es pieza fundamental para que este entramado económico funcione, ya que permite el intercambio de divisas. Además, las fluctuaciones en los tipos de cambio también influyen en el comportamiento de consumo, así como en las expectativas económicas de los países, pues la apreciación de una divisa en los mercados pueden suponer impactos negativos o positivos en la tasa de crecimiento de un país o región.

1.2. Pregunta de la investigación

¿Puede generarse un modelo matemático del mercado de divisas que exhiba la simetría de norma, en particular puede compararse con las leyes del electromagnetismo?

1.3. Objetivo de la investigación

Construir un modelo matemático que sea solución de las ecuaciones de Maxwell a partir de datos de Forex para los cambios euro-dólar.

1.4. Justificación

El mercado de divisas o mercado de tipos de cambio es un mercado global y descentralizado en el que se negocian divisas. También conocido como Foreign Exchange o FX, el de divisas es un mercado fundamentalmente no organizado, denominado en inglés *Over The Counter*, (OTC). Hoy en día, el mercado financiero

es el mercado más grande del mundo. Aglutina un volumen medio diario negociado en torno a los 5 billones de dólares. Además, con una importante y creciente *electronificación*. El Mercado de Divisas es, por mucho, el mercado financiero más grande del mundo, estando por encima del mercado de acciones, opciones y futuros. A diferencia de otros mercados financieros, no tiene una ubicación física donde se realizan las operaciones. El mercado de divisas está en funcionamiento 24 horas al día durante 5,5 días a la semana. Comienza a operar los domingos por la tarde con la apertura del mercado en Australia y finaliza los viernes con el cierre de EE. UU. (Nueva York). Presenta un gran número de centros operativos alrededor del mundo. Destacan las siguientes ciudades; Tokio, Singapur, Sídney, Hong Kong, Bahrein, Londres, Frankfurt, Zúrich, Nueva York, Chicago y Toronto (18).

Las principales funciones del mercado de divisas o tipos de cambio son las siguientes(18):

1. Fijar los precios de unas monedas con respecto a otras (pares de divisas), es decir, definir el número de unidades a entregar de una moneda a cambio de una unidad de otra moneda distinta.
2. Permitir la realización de coberturas de riesgo de tipo de cambio, por ejemplo, cuando se realizan inversiones en moneda extranjera.
3. Favorecer el intercambio de fondos entre diferentes países; nos encontramos con países con excedentes de liquidez y países que necesitan dicha liquidez.
4. Financiar el comercio internacional, cuyas operaciones representan una parte muy significativa del mercado de divisas.

Al ser el mercado financiero más grande es de gran relevancia poder entender sus comportamiento.

1.5. Método

Para elaborar este proyecto de investigación se siguieron los pasos del método científico, de forma hipotética deductiva.

Para comprobar el uso de la teoría de norma como una propuesta metodológica para el arbitraje de divisas en Forex, se creó una base de datos del tipo de cambio euro-dólar del 1 de enero al 12 de junio del 2023 tomados de Investing. Los datos se tomaron por día.

Para realizar el análisis de datos se usó el software científico de Mathematica.

1.6. Hipótesis de la investigación

La teoría de norma puede usarse como metodología para describir el arbitraje de divisas en Forex.

Capítulo 2

Enfoque teórico de la oferta y la demanda en Forex

En este Capítulo abordamos el fundamento teórico del presente trabajo de tesis, tomando como base las leyes de oferta y de demanda para el mercado de Forex.

2.1. Sistema de tipo de cambio

La moneda o unidad monetaria de un país es una unidad de cambio que permite la transferencia de bienes y servicios (11), mientras que una divisa hace referencia a una moneda, o unidad de cuenta, extranjera o bajo soberanía externa respecto al ámbito con soberanía propia por donde circula la moneda y que se utiliza mayoritariamente para el intercambio de bienes y servicios entre países (10).

El tipo de cambio es una referencia usada en el mercado de divisas para conocer el número de unidades de moneda nacional que deben pagarse para obtener una moneda extranjera, es decir, es el número de unidades de moneda nacional que se obtienen al vender una unidad de moneda extranjera. El mercado de di-

2. ENFOQUE TEÓRICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA EN FOREX

visas o mercado cambiario tiene como principal objetivo de facilitar el comercio internacional y la inversión. Se le conoce como Forex (3).

Cada país cuenta con un régimen cambiario. Éste determina el tipo de cambio, pues el régimen que se tenga es la forma en que se administra el valor de su moneda respecto a otras (4). Los regímenes cambiarios más conocidos son el tipo de cambio real, fijo, flexible y de bandas cambiarias, los cuáles se analizarán a continuación.

2.1.1. Tipo de cambio real

El tipo de cambio real se considera un indicador de las posibilidades de éxito de la competitividad de los productos de un país en mercados extranjeros. La alineación y la variabilidad juegan un papel fundamental en el tipo de cambio real. La alineación es el precio relativo de los bienes comerciables en términos de precios de bienes no comerciables, mientras que la variabilidad está basada en la teoría de la paridad de poder de compra en la cual, el tipo de cambio real es igual al tipo de cambio nominal. Este último está inflactado por un índice de precios exterior y deflactado por un índice de precios interno (1).

2.1.2. Tipo de cambio fijo

En este sistema, la autoridad monetaria es la encargada de establecer un nivel del tipo de cambio. Además, se compromete a intervenir en el mercado de Forex comprando o vendiendo divisas para garantizar que el tipo de cambio de su moneda se mantenga al nivel establecido. El encargado de definir el precio de las divisas es el Banco Central, esto en función de los objetivos que haya fijado el gobierno, pero este puede cambiar el equilibrio de la balanza comercial abaratando los productos importados o los productos exportados. Por ello es que

este tipo de cambio puede estar sesgado hacia un tipo de cambio fijo sobrevaluado o un tipo de cambio fijo subvaluado (3).

2.1.3. Tipo de cambio flexible o flotante

En el tipo de cambio flotante, el precio de la divisa es determinado por la oferta y la demanda del mercado y no hay intervención de la autoridad monetaria. Como beneficio de seguir este tipo de régimen se tiene la autonomía en la política monetaria y fiscal, pues se ajusta de acuerdo a la oferta y la demanda. En México, el tipo de cambio que utiliza es el flotante. Este régimen es usado por la mayoría de los países. Funciona por las fuerzas libres del mercado. Es de esperarse que los Bancos Centrales no intervengan. Sin embargo, en situaciones de contingencia, la intervención se vuelve necesaria y esta puede ser aumentando la oferta de activos para bajar el precio en el mercado cambiario o bien incrementando la circulación de oferta monetaria para lograr subir el tipo de cambio (3).

2.1.4. Tipo de cambio bandas cambiarias

El esquema de tipo de bandas cambiarias es un intermedio entre el régimen de cambio fijo y el régimen de tipo flotante. En este caso, la autoridad monetaria fija una banda en la cual se deja que el tipo de cambio se mueva de forma libre. Si el tipo de cambio alcanza el techo o el piso de la banda fijada, la autoridad interviene vendiendo o comprando divisas para mantener el tipo de cambio dentro de la banda (3).

2.2. Oferta y demanda en el mercado de divisas

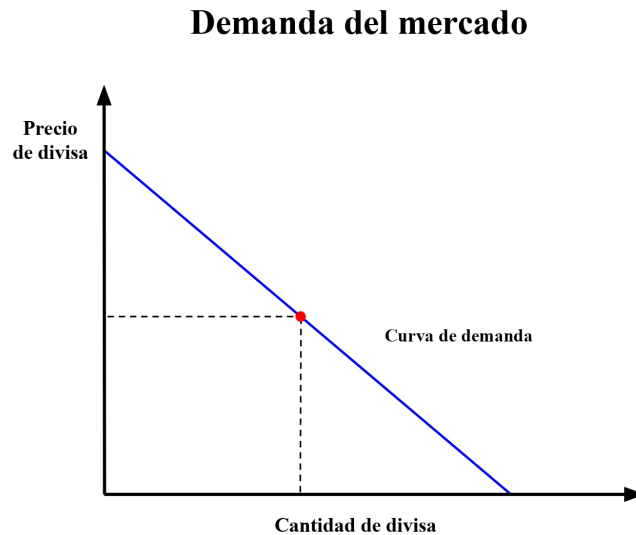
Oferta y demanda son términos que hacen referencia a la conducta de los participantes que interactúan en un mercado. Los compradores determinan la demanda de un bien o servicio, mientras que los vendedores, la oferta; recordemos que un mercado consiste en un grupo de compradores y vendedores de un bien o servicio en particular (23). A continuación explicamos la relación de oferta y demanda con el mercado de divisas.

2.2.1. Ley de demanda

La demanda examina la conducta de los compradores en un mercado. Analicemos los determinantes de la demanda, es decir, qué factores influyen en la cantidad que los compradores desean y pueden pagar. Aunque existen diversos factores que influyen en la cantidad demandada de un bien o servicio, al analizar el funcionamiento de los mercados, un determinante fundamental en la demanda es el precio del bien. La ley de la demanda dice que si todo lo demás permanece constante, la cantidad demandada de un bien disminuye cuando el precio del bien aumenta. Contrario a esto, si el precio disminuye, la demanda aumenta (23).

La curva de la demanda es una herramienta gráfica útil para visualizar el comportamiento de la demanda de un bien o servicio. Esta curva es representada mediante una recta cuya pendiente es negativa. Dicha recta muestra la relación que existe entre el precio y la cantidad demandada de dicho bien o servicio (23). Este trabajo se enfoca en la demanda de divisas. En la Figura 2.1 se muestra una curva que representa la demanda de una divisa en el mercado Forex. Se puede apreciar que al aumentar el precio, la demanda disminuye y al bajar la demanda de esta divisa, aumenta.

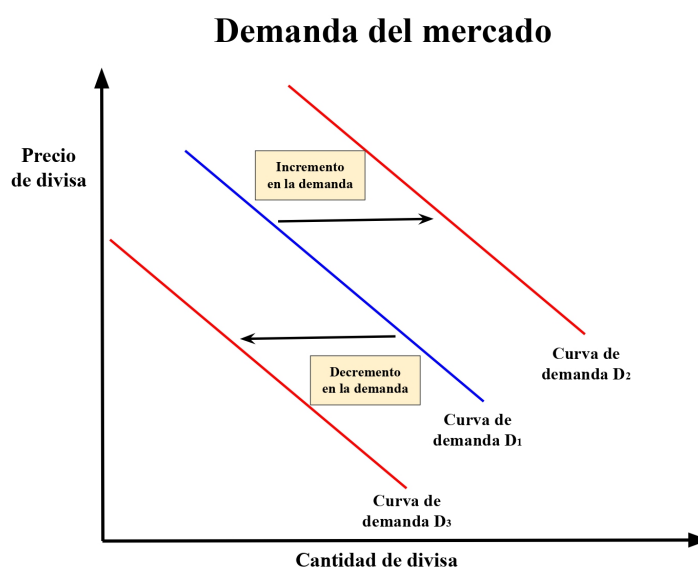
Figura 2.1: Curva de demanda de una divisa en el mercado Forex.



Aunque en la curva de demanda del mercado todo permaneciera constante, esto no implicaría que el precio del bien permanece constante en el tiempo, pues si ocurriese algo que pueda alterar la cantidad de demanda a un precio dado, la curva de la demanda tendría un desplazamiento (23). Con un precio dado, un incremento de la cantidad de demanda tiene como consecuencia un desplazamiento en la curva de demanda hacia la derecha. Esto implica un incremento en la demanda. Pero si se tuviera una disminución en la cantidad de demanda, se tiene así un desplazamiento en la curva de demanda hacia la izquierda; esto es un decremento en la demanda. En la Figura 2.2 podemos observar la representación de estos desplazamientos en la curva de la demanda.

2. ENFOQUE TEÓRICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA EN FOREX

Figura 2.2: Representación de un desplazamiento hacia la derecha e izquierda en la curva de la demanda.



Existen muchas variables que pueden ocasionar un desplazamiento en la curva de demanda. A continuación se describen las de mayor impacto (23).

1. **Ingreso:** El ingreso de los consumidores es un factor esencial en la demanda de un bien o servicio, pues ya que un ingreso menor significa tener una menor cantidad de dinero para gastar y, por ende, se gasta menos en algunos bienes.
2. **Precios de bienes relacionados:** Se ha explicado que si el precio de un bien aumenta, se espera que su demanda se reduzca, pero la demanda de los bienes sustitutos crece. Sin embargo, un aumento en el precio también implica una disminución en la demanda de los bienes complementarios.
3. **Gustos:** Los gustos juegan un papel importante en la demanda de un bien. Si bien los economistas no tratan de explicar los gustos de las personas, sí

estudian el impacto que se genera en la economía cuando los gustos cambian.

4. **Expectativas:** Las expectativas sobre el futuro que tengan los consumidores pueden afectar, en el presente, la demanda de bienes y servicios, pues si el público piensa que los precios aumentarán, adelantarán sus compras, pero si las expectativas son una baja en los precios, las compras se postergarán.
5. **Número de compradores:** La demanda del mercado depende también del número existente de compradores. A mayor número de consumidores mayor será la cantidad demandada de bienes

2.2.2. Ley de oferta

La oferta se refiere a la cantidad ofrecida de cualquier bien o servicio que los vendedores quieren y pueden vender. Existen diversos factores que determinan la cantidad que se puede ofertar. Sin embargo, el precio es fundamental. La ley de oferta establece que, con todo lo demás constante, si el precio de un bien aumenta, la cantidad ofertada de dicho bien también aumenta y cuando el precio de un bien disminuye, la cantidad que se ofrece de dicho bien también disminuye (23).

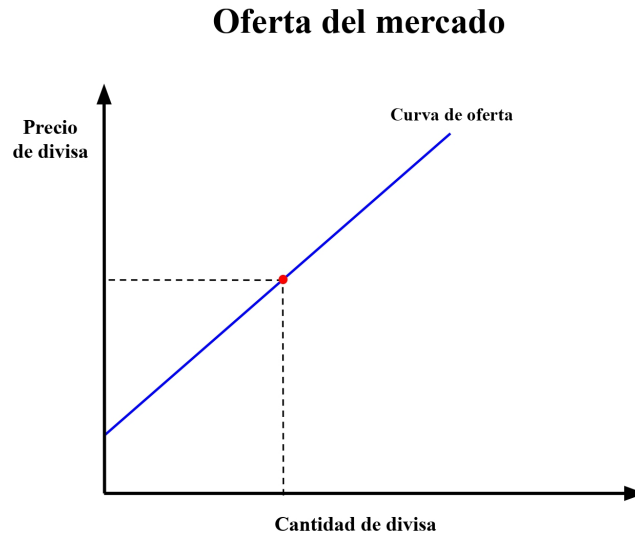
La representación gráfica que muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad ofertada por los vendedores en el mercado se conoce como curva de oferta. La curva de oferta se representa por una línea recta que tiene pendiente positiva, debido a que si se mantienen constantes todos los demás factores que pueden influir en la oferta, a mayor precio, mayor la cantidad ofertada (23).

En la Figura 2.3 se representa la curva de la oferta para una divisa. Se pueden observar las variaciones de la cantidad ofertada conforme el precio del bien cambia, esto manteniendo constantes todos los demás factores que, además del precio,

2. ENFOQUE TEÓRICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA EN FOREX

influyen en las decisiones de los productores sobre la cantidad que venderán.

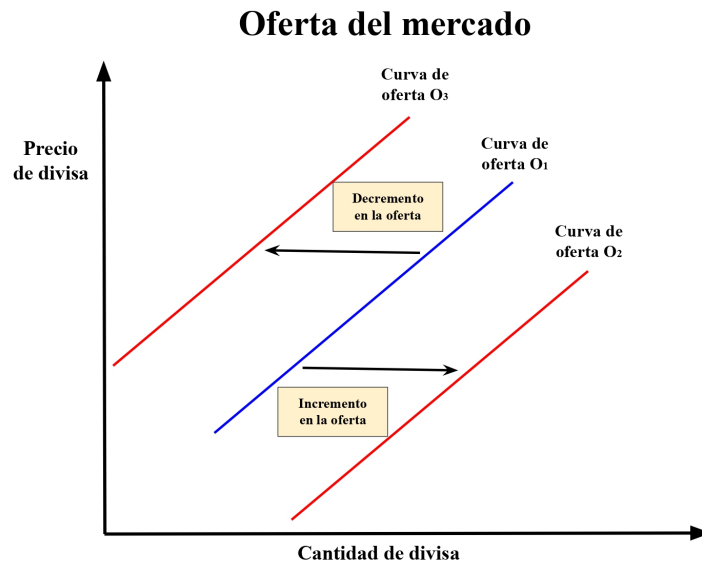
Figura 2.3: Curva de la oferta de una divisa en el mercado Forex.



Elaboración propia con base en Mankiw (23).

Debido a que la curva de la oferta mantiene todos los demás factores constantes, la curva se desplaza cuando uno de los factores cambia. En la Figura 2.4 se muestran los desplazamientos de la oferta. Si existe un cambio que aumente la cantidad ofertada a cada precio, hay un desplazamiento de la curva de la oferta hacia la derecha. Esto es un incremento de la oferta. Para cualquier cambio que reduzca la cantidad ofrecida a cada precio la curva de la oferta se desplaza hacia la izquierda; esto es un decremento de la oferta (23).

Figura 2.4: Representación de un desplazamiento hacia la derecha e izquierda en la curva de la oferta.



Elaboración propia con base en Mankiw (23).

Al igual que en la demanda, existen muchas variables que pueden generar un desplazamiento en la curva de la oferta. A continuación, se presentan las más relevantes (23).

1. **Precios de los insumos:** El precio de los insumos es el elemento más importante para definir el precio de un producto, pues si existe un aumento, el vendedor debe aumentar el precio de venta para mantener su margen de utilidad.
2. **Tecnología:** Los avances tecnológicos permiten incrementar las cantidades de bienes que pueden producirse. Si se reducen los costos, se puede aumentar la oferta.
3. **Expectativas:** La cantidad de un bien que puede ofrecer hoy una empresa

2. ENFOQUE TEÓRICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA EN FOREX

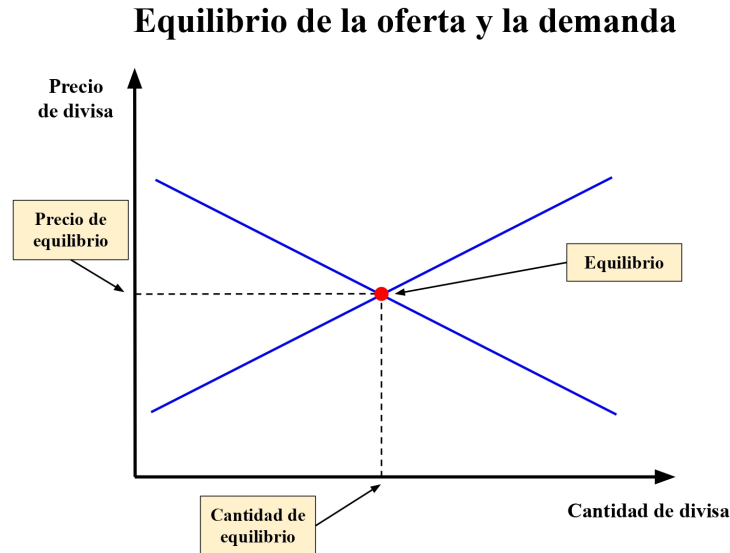
puede depender de sus expectativas sobre el futuro. Por ejemplo, si espera que el precio de un bien aumente en el futuro, almacenará una parte de su producción actual y ofrecerá menos en el mercado hoy.

4. **Número de vendedores:** Además de los factores señalados que afectan individualmente en el comportamiento de los vendedores, la oferta del mercado depende del número de vendedores.

2.2.3. Ley de oferta y demanda

Una vez vistas las leyes de oferta y demanda, analizamos la relación entre éstas. Comencemos definiendo el concepto de precio de equilibrio como la cantidad del bien que los compradores están dispuestos y son capaces de comprar y que equivale exactamente a la cantidad que los vendedores están dispuestos y son capaces de vender. También es conocido como precio de liquidación de mercado, pues con este precio, los compradores han comprado todo lo que querían y los vendedores han vendido todo lo que querían (23). En la Figura 2.5 se representa el equilibrio entre oferta y demanda.

Figura 2.5: Representación del equilibrio de la oferta y la demanda.

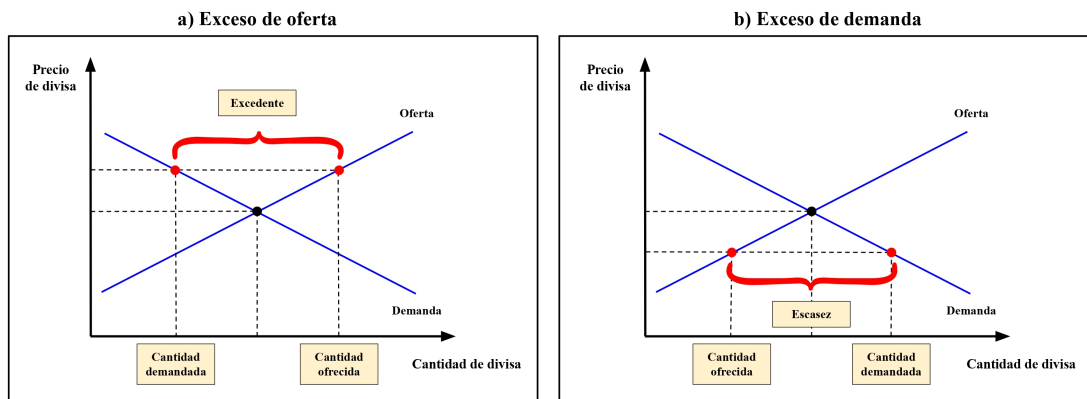


Elaboración propia con base en Mankiw (23).

Las acciones de los compradores y los vendedores mueven naturalmente los mercados hacia el equilibrio de la oferta y la demanda, pues si se tiene excedente de un bien, los vendedores no pueden vender todo lo que quieren al precio actual. Esto es una situación de exceso de oferta. La forma de responder al excedente es mediante la reducción de sus precios. Esta caída en los precios, a su vez, aumenta la cantidad demandada y reduce la cantidad ofrecida. Por el contrario, si hay escasez del bien, los demandantes no pueden comprar todo lo que quieren al precio actual. En ocasiones, se dice que la escasez es una situación de exceso de demanda. Debido a este exceso de bienes, conforme aumenta el precio, la cantidad demandada se reduce, al igual que la cantidad ofrecida (23). En la Figura 2.6 se muestran ambos casos.

2. ENFOQUE TEÓRICO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA EN FOREX

Figura 2.6: En la figura a) hay un exceso de oferta, mientras que en b) se muestra exceso de demanda.



Elaboración propia con base en Mankiw (23).

En ambos casos, estos cambios representan movimientos a lo largo de las curvas de la oferta y la demanda. Esto lleva al mercado hacia el equilibrio. En la mayoría de los mercados libres, los excedentes y la escasez son temporales pues, con el tiempo, los precios se mueven hacia sus niveles de equilibrio. Este fenómeno es tan general que se conoce como la ley de la oferta y la demanda: el precio de un bien cualquiera se ajusta para llevar al equilibrio la cantidad ofrecida y la cantidad demandada de ese bien (23).

En el caso del mercado de divisas, la ley de oferta y demanda determina el precio de las divisas, al existir mayor demanda de una divisa, éstas aumentan de precio. En el siguiente Capítulo explicaremos la analogía entre Forex y la física tomando como base la variación de los precios.

Capítulo 3

Interpretación física del mercado financiero

En este Capítulo abordamos el marco teórico que usamos para interpretar el mercado financiero desde una perspectiva de simetrías de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Dicha perspectiva es parte de la base con la que se fundamenta el presente trabajo y toma como punto de partida las ideas de Maldacena (22) y Schwichtenberg (34).

3.1. Mercado de divisas

El mercado FOREX o simplemente FX, es el mercado global de compra-venta de divisas. Se trata del mercado que más movimiento de capitales registra a diario, más que la suma de todos los demás mercados juntos. Decimos que es un mercado global, porque está disponible para los inversores de todo el mundo 24 horas al día y 5 días a la semana. Existen aproximadamente unas 4500 instituciones que participan activamente en el FOREX y millones de inversores que lo hacen a través de estas instituciones.

A diferencia de otros mercados financieros que operan en una ubicación centra-

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

lizada, el mercado mundial de divisas no opera en un lugar concreto. El mercado Forex no es más que una red electrónica global de bancos, instituciones financieras, intermediarios y operadores individuales, todos involucrados en la compra y la venta de divisas. La actividad de *trading* tiene lugar en todo el mundo, 24 horas al día, coincidiendo con la apertura y cierre de los principales centros financieros. Así, a todas horas, cinco y medio días a la semana y en cualquier lugar del mundo, hay compradores y vendedores de Forex, lo que lo convierte en el mercado más activo y líquido del mundo.

Tradicionalmente, en Forex sólo operaban con grandes volúmenes los sectores bancarios para sus propios fines comerciales y de inversión, pero desde 1971, cuando los tipos de cambio ya fluctuaban libremente, el volumen de trading se ha incrementado drásticamente. A día de hoy, importadores y exportadores, gerentes de carteras internacionales, multinacionales, especuladores, day traders, inversores a largo plazo y fondos de cobertura utilizan el mercado de divisas para especular, pagar por bienes y servicios, efectuar transacciones en activos financieros o reducir el riesgo de los movimientos de divisas protegiendo su exposición en otros mercados. Sin embargo, es importante señalar que se estima que más del 90 % del volumen de trading diario de este mercado se genera como resultado de operaciones especulativas.

3.2. Simetrías en la física

Dentro de los desarrollos físicos más importantes en la descripción de los constituyentes fundamentales del universo y sus interacciones, se tiene el hecho de que no sólo existe el espacio-tiempo (donde todos los fenómenos físico suceden) sino también los espacios internos (donde la descripción matemática de los objetos

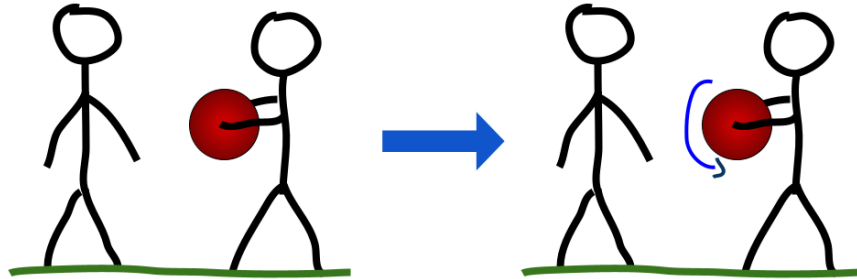
obtiene una realidad física medible). El espacio-tiempo, junto con estos espacios internos, forman la base que es usada para dar sentido a la física moderna. Una de las ideas más importantes de este campo es el no considerar una estructura estática, sino que esta estructura tiene una parte dinámica de la naturaleza misma. En este apartado definimos conceptos físicos que se toman de base para el presente trabajo.

3.2.1. Simetrías

Una forma sencilla de entender el concepto de simetría es imaginando que se tiene dos personas, una frente a la otra. Una de las personas sostiene una pelota perfectamente esférica, de un color sólido, de modo que no se puede distinguir un punto de otro sobre su superficie, mientras que la persona sin pelota tiene los ojos cerrados. La persona que sostiene la pelota la rota pero sin cambiar su posición. Posteriormente, la persona sin pelota abre los ojos. La persona que no tiene pelota no podrá distinguir si ésta pelota fue girada o no. Esta rotación de la pelota corresponde a una simetría de este juego. En cambio, si la persona de la pelota la traslada de lugar, la persona sin pelota se daría cuenta inmediatamente. Esta traslación no es una simetría de este juego de pelota. En la Figura 3.1 se ilustra esta situación.

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

Figura 3.1: Representación de una simetría correspondiente a una rotación de una pelota perfectamente esférica.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Si la persona de la pelota ahora sostuviera un cubo, solo bajo algunas rotaciones por ángulos muy específicos serían imperceptibles los cambios. En general, las transformaciones que cambian el estado de sistema pero conducen a un nuevo estado *indistinguishible* del primero son simetrías. Es decir, una simetría nos lleva de un estado a otro diferente pero que conserva las mismas propiedades.

En términos matemáticos, el conjunto de todas las transformaciones que dejan un objeto específico sin cambios, así como la regla que nos permite combinar dos transformaciones de tal manera que obtengamos el mismo resultado con una sola transformación de simetría, forman un *grupo*.

Existen grupos discretos -como en el caso de las rotaciones que dejan invariante a un cubo- o continuos -como las rotaciones de la esfera. Los primeros tienen un número finito de elementos; los segundos, un número infinito. Las interacciones fundamentales se describen mediante transformaciones en el espacio interno de

los sistemas físicos de interés (partículas). Existen transformaciones independientes de las coordenadas del espacio-tiempo donde se mueven las partículas. Estas se llaman transformaciones globales. Hay otro tipo de transformaciones que sí dependen de las coordenadas del espacio tiempo. Estas se llaman transformaciones locales. Algunas de ellas, por sus propiedades matemáticas, nos permiten describir la dinámica de las partículas elementales a través de cargas y corrientes conservadas. Estas son simetrías de norma, calibre o Gauge y las revisamos en detalle a continuación.

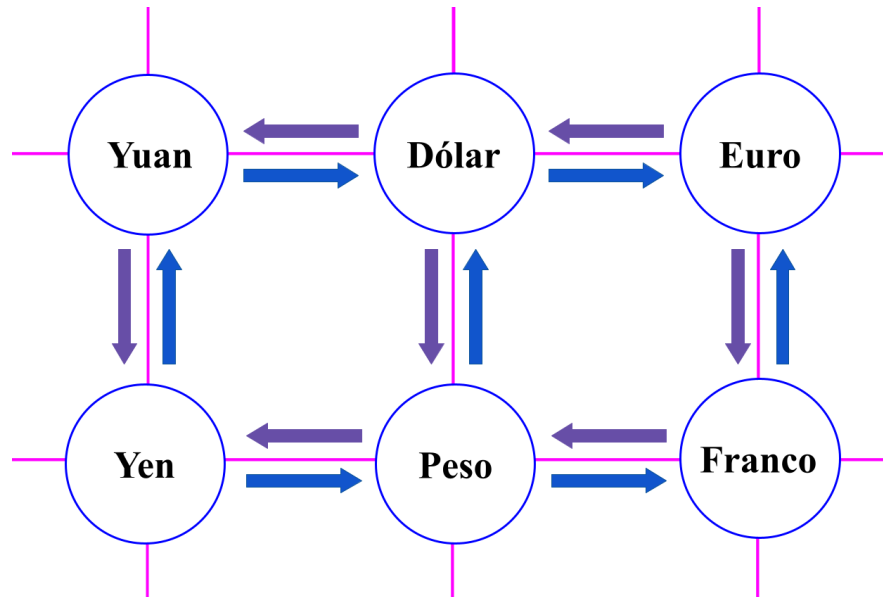
3.2.2. Simetría de Gauge

Una vez que hemos definido que es una simetría, hablaremos sobre la simetría de norma, calibre o Gauge y cómo puede trasladarse al entorno financiero tomado como base el artículo *“The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson”* de Juan Maldacena (22). El electromagnetismo puede considerarse como el prototipo de una *“teoría de Gauge”*. En este sentido, esta teoría nos proporciona una forma de entender las interacciones entre campos electromagnéticos, cargas y corrientes. Es importante señalar que este punto de vista es particularmente útil para generalizarlo a otras interacciones. Además, es útil para describir la mecánica cuántica (22).

Supongamos que en el mercado de Forex existe únicamente un banco por país. Cada país tiene su propia moneda. Por ejemplo, México tiene al peso, mientras que Japón tiene al yen; pensemos que cada banco que participa en Forex está posicionado en una cuadrícula como se muestra en la Figura 3.2. Cada banco está conectado con otros bancos vecinos. Cualquier banco puede comprar monedas extranjeras de sus vecinos. Además, cada banco es autónomo y establece el tipo de cambio de forma arbitraria y los bancos no cobra comisión (22).

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

Figura 3.2: Representación en un tablero de bancos de diferentes países conectados entre sí.



Elaboración propia, con base en Maldacena (22).

Supongamos que estamos en México y queremos movernos al banco Estados Unidos para comprar dólares y el tipo de cambio publicado es de 20 pesos = 1 dólar. Si se tuvieran 100 pesos se podrían obtener 5 dólares; si ahora decidiéramos regresar a México a comprar pesos con los dólares que se tienen entonces regresaríamos a tener 100 pesos. Por lo tanto, si se compra monedas de un país a otro y se regresa a comprar la moneda original, se terminaría con la cantidad original de dinero. Otra regla dentro de este arreglo es que solo se puede comprar monedas al país de junto. Desde allí se puede continuar comprando monedas hasta cualquiera de sus vecinos y así sucesivamente. Sin embargo, no es posible comprar monedas de un país a un país que no es vecino inmediato sin comprar monedas en bancos intermediarias que los conecten. Por ejemplo, no podemos

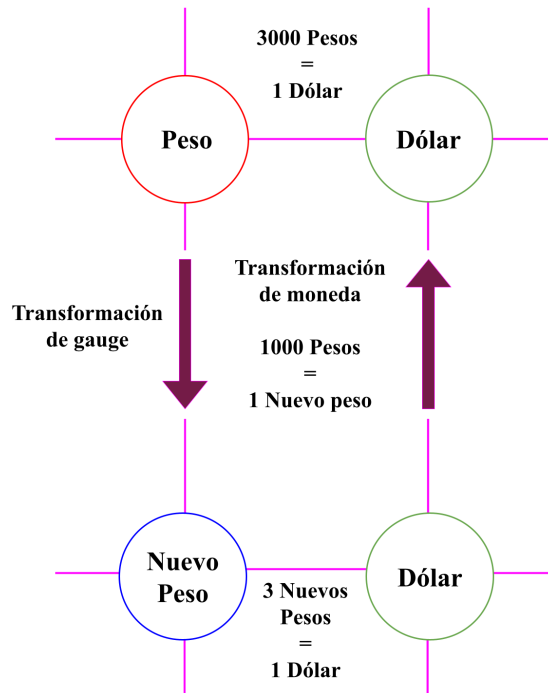
comprar yuanes directamente desde México. Por ahora, consideremos que solo se comercializan monedas en nuestro modelo de mercado.

Recordemos los supuestos de este caso. Se tienen bancos de diferentes países dispuestos en una cuadrícula. Cada país tiene su propia moneda. Los bancos están conectados entre sí. Los bancos eligen cualquier tipo de cambio que les plazca. No hay comisión. Solo puede llevarse dinero de un banco a otro. El siguiente paso es identificar la simetría de Gauge en este caso. Para ello, supongamos que uno de los países ha acumulado demasiados ceros en su moneda y quiere eliminarlos. Esto es común en el mundo real en países con una inflación alta. Como medida a esta inflación, el gobierno local decide cambiar sus unidades monetarias(22). Por ejemplo, en México, debido a la inestabilidad económica del país en la durante los años 80's, la inflación hizo crecer en gran medida el precio de las mercancías. Por ello, fue necesario emitir billetes de denominaciones cada vez mayores, lo cual resultaba poco útil y se cuestionaban las verdaderas reservas de plata y oro del país.

Por tal motivo, mediante decreto publicado el 22 de junio de 1992 en el Diario Oficial de la Federación (7), a partir del 1 de enero de 1993 entró en vigor una nueva unidad monetaria para los Estados Unidos Mexicanos denominada *Nuevo peso*, el cual quitaba 3 ceros al peso de 1980, es decir que 1,000 pesos de 1980 equivalen a 1 nuevo peso (*N\$*) a partir de enero de 1993. Ahora, imaginemos que deseamos comprar dólares con estos nuevos pesos. Si con los viejos pesos el tipo de cambio era 3000 pesos = 1 dólar, ahora serán 3 pesos = 1 dólar. Esto es una simetría porque después de este cambio, nada cambia realmente, nadie es más rico o más pobre y el cambio no ofrece nuevas oportunidades económicas. Se hace puramente por conveniencia. Este ejemplo se representa gráficamente en la Figura 3.5.

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

Figura 3.3: Simetría de Gauge entre los viejos pesos y los nuevos pesos de México en 1993.



Elaboración propia, con base en Maldacena (22)).

Esta simetría de Gauge puede verse en acción en algunas monedas mexicanas en la Figura 3.4. Se llama simetría de Gauge porque es una simetría de las unidades que usamos para medir o *calibrar* el valor de varias cantidades. Esta simetría es *local*, en el sentido de que cada país puede decidir localmente realizar este cambio, independientemente de lo que decidan los países vecinos. Algunos países lo hacen con mayor frecuencia que a otros (22).

Figura 3.4: Equivalencias de monedas de los 80's con los nuevos pesos.



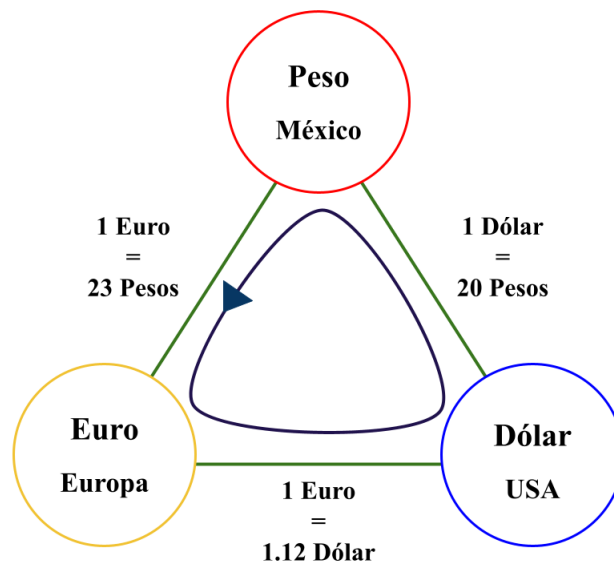
Fuente:<https://www.elfinanciero.com.mx/economia/te-acuerdas-cuando-eras-chiquito-y-el-dolar-valia-3-pesos/>.

Un especulador es un agente que opera en mercados bursátiles comprando y vendiendo títulos, valores o monedas con el fin de obtener beneficios. Esto como consecuencia de la variación en los precios del mercado en que trabaje. Un especulador en el mercado de Forex que hemos descrito buscará el camino que le permita tener ganancias al tener variaciones en las monedas. Consideremos tres países, EU, Francia y México, con sus correspondientes monedas, es decir, dólares, euros y pesos. Ahora, supongamos que los países están conectados como en la Figura 3.5. Los tipos de cambio son los siguientes: 1.12 dólares = 1 euro , 1 dólar = 20 pesos , 1 euro = 20 pesos. Es posible ganar dinero bajo esta situación: Podemos comenzar en México con 20 pesos, ir a Francia y comprar 1 euro, después ir a EU y comprar 1.12 dólares, posteriormente regresar a México a comprar pesos y

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

obtener 22.4 pesos. Podemos observar que la ganancia realizando este circuito es de 1.12 o 12 % más de lo que se tenía originalmente; este factor es independiente de las unidades monetarias (22).

Figura 3.5: Representación de tres países con sus respectivas monedas. En los puentes verdes vemos los tipos de cambio correspondientes. Si se sigue el circuito por la línea azul, se ganará dinero; al seguir este circuito se tendría un factor de ganancia de 1.12 o ganancias del 12 %.



Elaboración propia, con base en Maldacena (22).

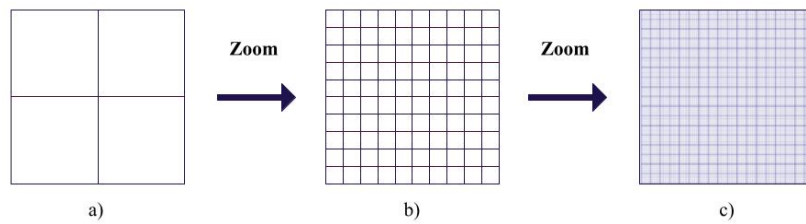
Con este ejemplo se podría pensar que los bancos no fijan los precios de manera adecuada. Sin embargo, esto no es así. Aunque los bancos fijen un precio en las divisas, este precio cambiará en función de la oferta y la demanda. Por ello, estas oportunidades de ganancia en realidad no están siempre presentes ni son constantes. Los especuladores tienen como objetivo ganar dinero y para ello elegirán el camino que les haga ganar la mayor cantidad del mismo. En la situación anterior,

los especuladores estarían moviéndose en círculos yendo de México a Francia a los Estados Unidos y de regreso a México. Estarían siguiendo la línea verde en la Figura 3.5. Si esto lo movemos al ámbito de la física, los países son análogos a puntos -o pequeñas regiones- en el espacio, mientras que todo el conjunto de tipos de cambio es una configuración de las conexiones o potenciales electromagnéticos en todo el espacio (22).

Pensemos este caso desde un punto de vista físico. Supongamos que este ejemplo sobre los 3 países y su tipo de cambio sucede a distancias muy pequeñas, mucho más pequeñas que las que podemos medir hoy. Al observar un sistema físico (incluso si este se encuentra en el vacío), se estaría observando a estos países desde muy lejos. Esto haría ver al sistema continuo, como en la Figura 3.6. De forma análoga, cuando un electrón se mueve en el vacío, se mueve fácilmente de un punto en el espacio-tiempo al siguiente. De forma microscópica, estaría cambiando constantemente entre los diferentes países, cambiando el dinero que transporta y volviéndose “más rico” en el proceso. En física, no sabemos al momento si existe una estructura discreta subyacente como la de los países descritos, pero al realizar cálculos en las teorías de Gauge, a menudo asumimos que existe una estructura discreta como esta y luego tomamos una extrapolación al límite continuo, cuando todos los países están infinitesimalmente cercanos unos de otros (22).

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

Figura 3.6: Retículo de países en varias escalas. Se muestra una perspectiva de este mallado vista desde lejos. Si uno se aleja lo suficiente, puede ver toda la malla como un continuo.

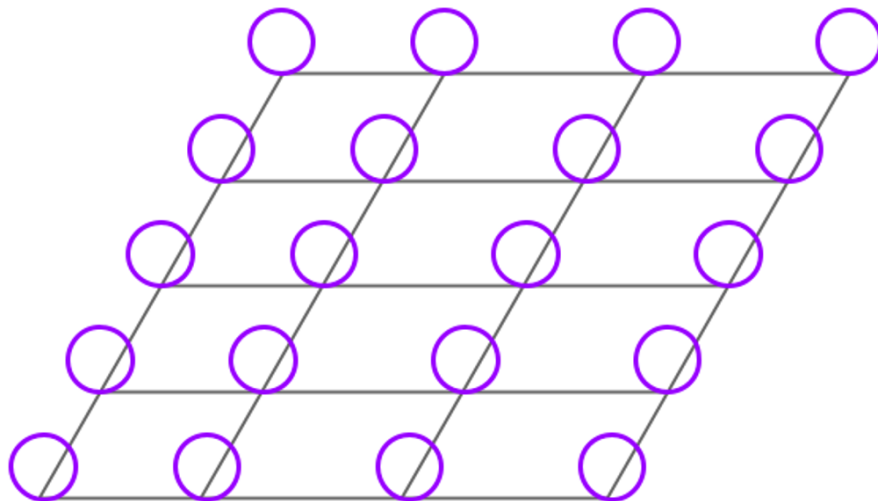


Elaboración propia, con base en (22).

El electromagnetismo se basa en una simetría de Gauge similar. Existen transformaciones espacio-temporales que se pueden realizar a las conexiones o potenciales electromagnéticos, que toman valores distintos en cada punto del espacio-tiempo, sin alterar los valores de los campos electromagnéticos. Dicha simetría corresponde a la misma que encontramos en las rotaciones de un círculo con respecto a un eje que pasa por su centro. Una forma de representar esta idea es imaginar que en cada punto del espacio-tiempo se tiene un círculo extra, una dimensión *interna* adicional, véase la Figura 3.7. Para este caso, el “país” que se encuentra en cada punto del espacio-tiempo elige una forma de definir ángulos en este círculo adicional de forma independiente. Más precisamente, cada “país” elige un punto en el círculo que llaman “ángulo cero” y luego describe la posición de cualquier otro punto en términos del ángulo relativo a este punto. Esto es similar a elegir la moneda en el ejemplo de los tres países. Ahora, en física, no se sabe si este círculo es real ni si efectivamente hay una dimensión extra. Solo se sabe que la simetría es similar a la que se tendría si hubiera una dimensión adicional. Ya que física buscamos tener la menor cantidad de suposiciones posibles,

una dimensión adicional no es una suposición necesaria, solo la simetría lo es. Además, las únicas cantidades relevantes son los potenciales electromagnéticos que nos dicen cómo cambia la posición de una partícula en el círculo adicional a medida que vamos de un punto en el espacio-tiempo a su vecino (22).

Figura 3.7: La interacción electromagnética tiene las mismas simetrías que una configuración donde tenemos un círculo en cada punto del espacio-tiempo. Aquí cada punto del espacio-tiempo es donde se cruzan las líneas negras. Podemos pensar en el círculo como una dimensión interna extra.



Elaboración propia, con base en Maldacena (22).

En el electromagnetismo los campos eléctrico y magnético obedecen las ecuaciones de Maxwell. En la analogía económica, esto sería equivalente a un requisito sobre los tipos de cambio. En el modelo económico, se puede entender intuitivamente este requisito de la siguiente forma: Imaginemos que tenemos una configuración con tipos de cambio genéricos. Los especuladores comienzan a llevar dinero. Supongamos que nos enfocamos en un puente en particular, donde se

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

encuentra un banco en particular. Habrá especuladores cruzando este puente en ambas direcciones. Sin embargo, si hay más especuladores yendo en una dirección que en la otra, entonces el banco podría quedarse sin una de las monedas (22).

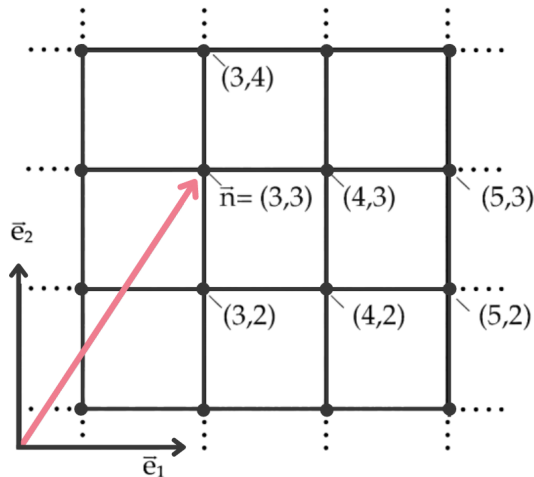
Por ejemplo, considere el banco sentado en un puente que conecta pesos con dólares. Si hay más especuladores queriendo comprar dólares que especuladores queriendo comprar pesos, el banco se quedará sin dólares. Si esto sucediera en el mundo real, entonces el banco ajustaría el tipo de cambio para que hubiera menos especuladores queriendo comprar dólares. De hecho, si asumimos que el número de especuladores que siguen un circuito particular es proporcional a la ganancia que tendrán a lo largo de este círculo, entonces se encuentra que la condición para que los bancos no se queden sin ninguna de las monedas, o que el flujo de dinero neto a través de cada puente es cero, es equivalente a las ecuaciones de Maxwell (22).

3.3. Interpretación física de un mercado financiero

El presente apartado está basado en el libro *“Physics from Finance : A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles”* de Jakob Schwichtenberg (34) y nos ayuda a profundizar en la analogía entre el mercado de divisas y el electromagnetismo.

Supongamos que tenemos un arreglo perfecto cuadrangular y bidimensional. En cada una de las esquinas del retículo se encuentra un país representado por $\vec{n} = (n_1, n_2)$, es decir, cada país se identifica por un vector \vec{n} que muestra su ubicación, como se ilustra en la Figura 3.8.

Figura 3.8: Representación de los países dentro de una red bidimensional con la etiqueta $\vec{n} = (n_1, n_2)$.



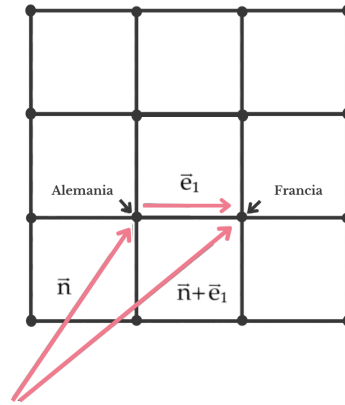
Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Suponiendo este arreglo como un tablero, es posible movernos de un país a

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

su vecino usando un vector base \vec{e}_i , donde i denota la dirección en la que nos movemos. Por ejemplo, en la Figura 3.9 tenemos el vector $\vec{e}_1 = (1, 0)$.

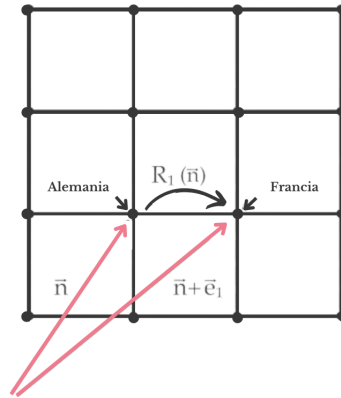
Figura 3.9: Representación del movimiento de un país inicial (Alemania) hacia un país vecino (Francia).



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Denotamos los tipos de cambio entre el país llamado \vec{n} y su vecino en la dirección i por $R_i(\vec{n})$. Por ejemplo, si el país en la ubicación \vec{n} usa marcos alemanes y su vecino en la dirección i usa francos, $R_i(\vec{n})$ nos dará la cantidad de francos que se pueden obtener por cada marco alemán. La representación gráfica de esto puede observarse en la Figura 3.10.

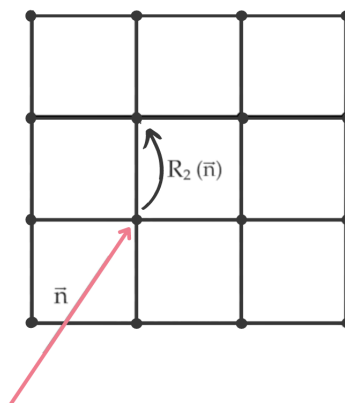
Figura 3.10: Representación del tipo de cambios entre dos países.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

De forma análoga, tenemos que $R_2(\vec{n})$ describe el tipo de cambio que se tendrá entre el país \vec{n} y el país ubicado en $\vec{n} + \vec{e}_2$; la representación gráfica se muestra en la Figura 3.11.

Figura 3.11: Representación del tipo de cambios entre \vec{n} y el país ubicado en $\vec{n} + \vec{e}_2$.



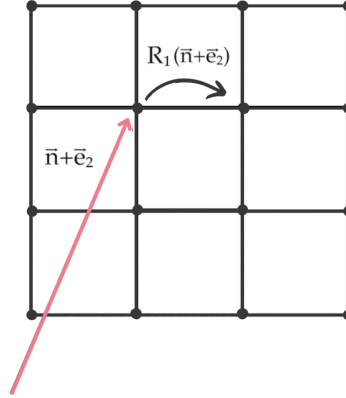
Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Bajo el mismo razonamiento, $R_1(\vec{n} + \vec{e}_2)$ describe el tipo de cambio que existe

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

entre el país $\vec{n} + \vec{e}_2$ y el país $\vec{n} + \vec{e}_2 + \vec{e}_1$, como observamos en la Figura 3.12.

Figura 3.12: Representación del tipo de cambios entre entre el país $\vec{n} + \vec{e}_2$ y el país $\vec{n} + \vec{e}_2 + \vec{e}_1$.



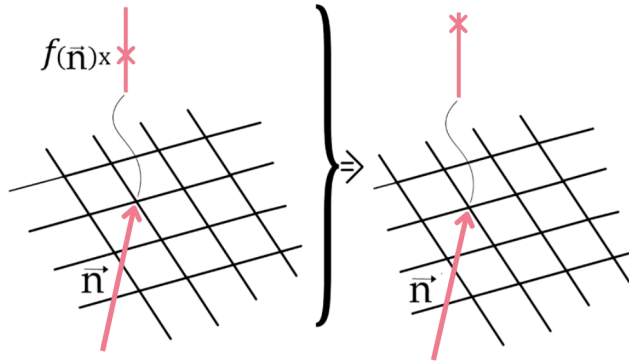
Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Es común utilizar en física los logaritmos para introducir un tipo de cambio. Esto permite realizar operaciones de forma sencilla. De forma particular, los productos en las reglas de transformación puede ser reemplazada por sumas de los logaritmos. Definimos

$$R_i(\vec{n}) \equiv e^{A_i(\vec{n})}. \quad (3.1)$$

A continuación introducimos la notación para las transformaciones de Gauge. En nuestro modelo de juguete, una transformación de Gauge es un cambio de escala de una moneda local e impacta directamente, por ejemplo, en los tipos de cambio. Usamos la notación $f(\vec{n})$ para denotar un cambio de escala de la moneda en el país en \vec{n} por un factor f . Este cambio de escala se observa en la Figura 3.13.

Figura 3.13: Cambio de escala de una moneda local.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

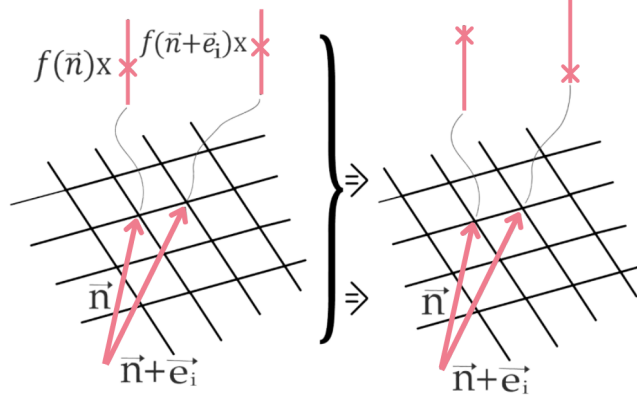
Ahora, introducimos de nuevo el logaritmo correspondiente para el cambio de escala:

$$f(\vec{n}) \equiv e^{\vec{n}}. \quad (3.2)$$

De manera general, al realizar una transformación de Gauge $f(\vec{n})$ en el país \vec{n} y también otra transformación de Gauge en el país vecino en la dirección i , $f(\vec{n} + \vec{e}_i)$, el tipo de cambio correspondiente cambia por la relación de estos dos factores:

$$R_i(\vec{n}) \rightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f(\vec{n})} R_i(\vec{n}). \quad (3.3)$$

Figura 3.14: Transformación de Gauge en dos países.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

En términos de logaritmos, esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 R_i(\vec{n}) &= e^{A_i(\vec{n})} \rightarrow \frac{f(\vec{n} + \vec{e}_i)}{f\vec{n}} R_i(\vec{n}) \\
 &= \frac{e^{\epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\epsilon(\vec{n})}} e^{A_i(\vec{n})} \\
 &= e^{A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n})}, \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

teniendo finalmente que, bajo un cambio de este estilo,

$$A_i(\vec{n}) \rightarrow A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n}). \tag{3.5}$$

La posibilidad de arbitraje aparece cuando existe una diferencia en los tipos de cambio que nos permite operar con divisas de tal manera que terminemos

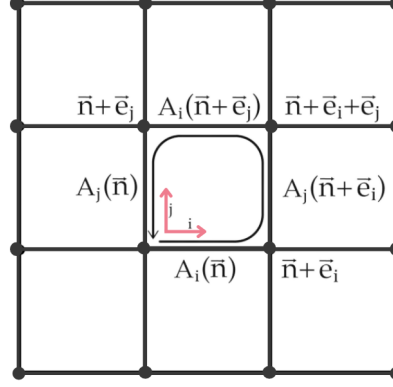
con más dinero del que teníamos al principio. Tenemos como condición que la moneda inicial y la moneda final sean las mismas. De esa manera, podemos estar seguros de si la cantidad final de dinero es mayor o no que la cantidad con la que comenzamos. Por lo tanto, necesitamos intercambiar dinero en un bucle o ciclo cerrado. Con lo anterior dicho, definimos el factor de ganancia como la relación entre la cantidad final de dinero y la cantidad inicial de dinero (en la misma moneda local). La ganancia total que podemos obtener siguiendo un ciclo específico, el cual podemos contabilizar como:

$$G(\vec{n}) = R_i(\vec{n})R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})}. \quad (3.6)$$

Cuando este factor de ganancia es mayor que uno, significa que podemos ganar dinero intercambiando monedas siguiendo el ciclo, pero si es menor que uno, perdemos dinero.

$R_i(\vec{n})$ indica cuánto de la moneda del país vecino en la dirección i obtenemos por cada unidad de la moneda local en el país en \vec{n} . Por lo tanto, a veces tenemos que dividir por el tipo de cambio correspondiente para calcular la cantidad resultante de una nueva moneda. En la Figura 3.15 observamos un ciclo o bucle en un intercambio de divisas con oportunidad de arbitraje representado en una malla cuadrangular.

Figura 3.15: Bucle en un cambio de divisas con oportunidad de arbitraje.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Nuevamente, utilizamos logaritmos correspondientes para el factor de ganancia, definimos

$$G(\vec{n}) \equiv e^{F_{ij}(\vec{n})}. \quad (3.7)$$

Podemos reescribir la ecuación (3.6) en términos de logaritmos como

$$\begin{aligned} G(\vec{n}) &= R_i(\vec{n})R_j(\vec{n} + \vec{e}_i) \frac{1}{R_i(\vec{n} + \vec{e}_j)} \frac{1}{R_j(\vec{n})} \\ &= e^{A_i(\vec{n})} e^{A_j(\vec{n} + \vec{e}_i)} \frac{1}{e^{A_i(\vec{n} + \vec{e}_j)}} \frac{1}{e^{A_j \vec{n}}} \\ &= e^{A_i(\vec{n}) + A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_j(\vec{n})}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esto nos permite reescribir, de la ecuación (3.7),

$$F_{ij} = A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_i(\vec{n})]. \quad (3.9)$$

Es importante resaltar que G y F_{ij} no cambian debido a las transformaciones de Gauge. Una posibilidad de arbitraje es algo real y, por ello, no puede depender de las opciones locales del sistema monetario interno. Las cantidades como esta generalmente se denominan invariantes de Gauge. Es decir, G y F_{ij} codifican lo que es físico en la estructura de los tipos de cambio (se puede establecer en cero simplemente cambiando los sistemas de coordenadas monetarias locales). Además, una observación técnica importante es que $F_{ij}(\vec{n})$ es antisimétrico, $F_{ij}(\vec{n}) = -F_{ji}(\vec{n})$, con respecto al intercambio, esto nos indica el sentido en el que se ha recorrido el bucle de moneda, lo que se deriva directamente de la definición (3.8).

Aunque solo hemos hablado de tipos de cambio espaciales, también existen tipos de cambio temporales, es decir, tipos de interés. Además de ubicaciones específicas (países), nuestra red puede contener copias de estas ubicaciones en diferentes momentos, es decir, se tendría una red espacio-temporal como en la Figura 3.16.

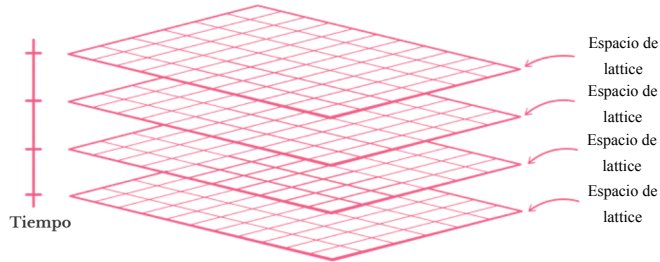
Esto significa que un punto en esta red de espacio-tiempo está especificado por $2 + 1$ coordenadas $\vec{n} = (n_0, n_1, n_2)$ y el componente cero indica el punto en el tiempo. Entonces, la ecuación (3.7) se puede escribir como:

$$F_{\mu\nu}(\vec{n}) = A_\nu(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - A_\nu(\vec{n}) - [A_\mu(\vec{n} + \vec{e}_\nu) - A_\mu(\vec{n})], \quad (3.10)$$

donde anteriormente $i, j \in \{1, 2\}$ y ahora $\mu, \nu \in \{0, 1, 2\}$.

Para generar un modelo que incluya otras características del mercado financiero, es necesario no solo una ubicación posible por país, sino infinitas, como si fuese una red continua. Cada una de estas posibles ubicaciones corresponden a un vector $\vec{x} = a\vec{n}$ donde \vec{n} es un vector con componentes enteros $\vec{n} = (n_i, n_j)^T$.

Figura 3.16: Red de espacio-tiempo.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Estos números enteros se vuelven cada vez más grandes en valor, en cualquier ubicación específica, a medida que a se hace más y más pequeño. Esto se debe a que encajamos en más y más ubicaciones dentro de un intervalo de espacio dado. Sin embargo, la longitud de un vector \vec{x} permanece fija y de tamaño finito. Por lo general, a se conoce como el espaciado en la lattice (o distancia inter-sitios). El límite en el que existe un continuo de posibles ubicaciones, se conoce como límite del continuo.

Con lo anterior, podemos especificar lo que significa matemáticamente tomar el límite continuo. En dicho límite, la distancia entre puntos vecinos de la red tiende a cero, $a \rightarrow 0$, mientras que \vec{x} permanece como un vector fijo de magnitud finita. Más aún, dado que existen contadores $A_i(\vec{n})$ que conectan puntos de red en nuestro retículo discreto, necesitamos reemplazarlos con contadores que conectan puntos en nuestro espacio continuo $A_i(\vec{n}) \rightarrow aA_i(\vec{x})$. Como veremos en un momento, el factor a asegura que los valores de nuestros contadores permanezcan

fijos al considerar el límite $a \rightarrow 0$.

Específicamente, la transformación en la ecuación (3.5),

$$A_i(\vec{n}) \rightarrow A'_i(\vec{n}) \equiv A_i(\vec{n}) + \epsilon(\vec{n} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{n}), \quad (3.11)$$

podemos reescribirla como

$$\begin{aligned} a\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow a\tilde{A}'_i(\vec{x}) &\equiv a\tilde{A}_i(\vec{x}) + \epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x}) \\ &= a\tilde{A}_i(\vec{x}) + a \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \\ &= a \left(\tilde{A}_i(\vec{x}) + a \frac{\epsilon(\vec{x} + \vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

En el límite $a \rightarrow 0$, el segundo término del lado derecho da un cociente de diferencias, siendo esto precisamente la definición de una derivada,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\epsilon(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \epsilon(\vec{x})}{a} \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.12), puede concluirse que

$$\tilde{A}_i(\vec{x}) \rightarrow \tilde{A}'_i(\vec{x}) \equiv \tilde{A}_i(\vec{x}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (3.14)$$

Análogamente, el factor de ganancia en la ecuación (3.8) se escribiría como

$$F_{ij} = A_j(\vec{n} + \vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n} + \vec{e}_j) - A_i(\vec{n})]. \quad (3.15)$$

Esto se convierte en

$$\begin{aligned}
 F_{ij}(\vec{x}) &= a\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - a\tilde{A}_j(\vec{x}) - [a\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - a\tilde{A}_i(\vec{x})] \\
 &= a^2 \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - a^2 \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

De aquí se observa que tenemos que reemplazar $F_{ij} \rightarrow a^2 \tilde{F}_{ij}$ para obtener una cantidad con un valor fijo en el límite $a \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
 a^2 F_{ij}(\vec{x}) &= a^2 \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - a^2 \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} \\
 \tilde{F}_{ij}(\vec{x}) &= \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} - \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a}. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

En el lado derecho, nuevamente tenemos cocientes de diferencias, que en el límite continuo,

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{A}_j(\vec{x} + a\vec{e}_i) - \tilde{A}_j(\vec{x})}{a} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_j \\
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{A}_i(\vec{x} + a\vec{e}_j) - \tilde{A}_i(\vec{x})}{a} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_i. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{A}_i. \quad (3.19)$$

Al incluir tipos de cambio temporales, se cambiarán los índices i, j por $\mu, \nu = 0, 1, 2$. En resumen, en el límite continuo, la ecuación (3.5) se convierte en

$$A_\mu(t, \vec{x}) \rightarrow A_\mu(t, \vec{x}) + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\mu}, \quad (3.20)$$

mientras que la ecuación (3.10) se vuelve

$$F_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (3.21)$$

Es posible obtener una ganancia de dinero no solo intercambiando divisas, sino también intercambiando bienes como metales. Esto dependerá de los precios locales. Puede ser lucrativo comprar, por ejemplo, plata en un país, llevarla a otro país, venderla allí y luego regresar al país original para comparar la cantidad final de dinero con la cantidad de dinero con la que comenzamos. De la definición del factor de ganancia como la relación entre la cantidad final y la cantidad inicial de dinero (en el misma moneda local), el factor de ganancia para el proceso descrito es

$$g_i(\vec{n}) = \frac{p(\vec{n} + \vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_i(\vec{n})}, \quad (3.22)$$

donde $p(\vec{n})$ denota el precio de la plata en el país ubicado en \vec{n} . Recordemos que un factor de ganancia mayor que uno significa una ganancia, un factor menor a uno, representa una pérdida, mientras que un factor igual a uno nos indica que no hubo perdidas ni ganancias. Una vez más, podemos introducir los logaritmos correspondientes, es decir,

$$\begin{aligned} g_i(\vec{n}) &= e^{H_i(\vec{n})}, \\ p(\vec{n}) &= e^{\varphi(\vec{n})}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

y la ecuación (3.22) se reescribe en términos de los logaritmos correspondientes como

$$\begin{aligned}g_i(\vec{n}) &= \frac{p(\vec{n} + \vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_i(\vec{n})}, \\e^{H_i(\vec{n})} &= \frac{e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i)}}{e^{\varphi(\vec{n})}e^{A_i(\vec{n})}} \\ &= e^{\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Esto implica

$$H_i(\vec{n}) = \varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n}).\tag{3.25}$$

El factor de ganancia $g_i(\vec{n})$ y su logaritmo $H_i(\vec{n})$ cuantifican directamente qué tan conveniente es el comercio de alguna mercancía para un comerciante con sede en la ubicación \vec{n} y que hace negocios con el país ubicado en $\vec{n} + \vec{e}_i$. Podemos imaginar que cuanto más lucrativo sea un comercio, más lo utilizarán los comerciantes para ganar dinero.

Esto nos motiva a definir la corriente de la plata

$$J_i(\vec{n}) = qH_i(\vec{n}) = q[\varphi(\vec{n} + \vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n})],\tag{3.26}$$

donde q es una constante de proporcionalidad que cuantifica la intensidad con la que reaccionan los comerciantes en un sistema dado ante una oportunidad de ganar dinero comerciando cualquier mercancía.

De forma análoga, podemos generalizar esta fórmula para situaciones que involucran tiempo reemplazando $i \in \{1, 2\}$ con $\mu \in \{0, 1, 2\}$, es decir,

$$J_\mu(\vec{n}) = q[\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})]. \quad (3.27)$$

Además, en el límite continuo, la ecuación (3.27) se convierte en

$$J_\mu(t, \vec{x}) = q \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(t, \vec{x}) - A_\mu(t, \vec{x}) \right). \quad (3.28)$$

Si analizamos a detalle las tres cantidades $J_\mu(\vec{n})$ (con $\mu \in \{0, 1, 2\}$), podremos observar que el factor de ganancia $H_i(\vec{n})$ nos dice qué tan lucrativo es un comercio en el que se transporta una mercancía desde el país en \vec{n} al país vecino $\vec{n} + \vec{e}_i$. Por ello, cada $J_i(\vec{n})$ es una medida de la cantidad de mercancía que fluye entre los dos países. El comercio relacionado con $H_0(\vec{n})$ no implica el intercambio de mercancía entre países vecinos. En cambio, $H_0(\vec{n})$ nos dice cuánto podemos ganar comprando alguna mercancía y vendiéndola en un momento posterior en el mismo país. Por lo tanto, $J_0(\vec{n})$ es una medida de la cantidad de producto en el país situado en \vec{n} . Es importante resaltar que esto nos da información sobre la cantidad de mercancía en un lugar determinado o sobre cómo fluye dicha mercancía a través del sistema.

La mercancía está representada en nuestra descripción en términos un tanto abstractos por su precio. Sin embargo, la cantidad de mercancía en un determinado país no es proporcional al precio local de la mercancía. El precio local depende del sistema de convenciones de la moneda local y, por lo tanto, no puede representar directamente una cantidad medible en el mercado. En cambio, la cantidad de mercancía en un país dado debe estar representada por una cantidad independiente de Gauge como $J_0(\vec{n})$. Lo mismo es cierto para el flujo de mercancía $J_i(\vec{n})$.

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

La idea principal es que la concentración y el flujo de mercancía están codificados de alguna manera en el patrón de precios en los distintos países en diferentes momentos. Los precios en sí mismos no contienen información sobre el flujo y la concentración de la mercancía, ya que dependen de las convenciones locales. En cambio, todo lo que necesitamos saber está codificado en cómo cambian los precios a medida que nos movemos de un país a otro o a un punto diferente en el tiempo. Por ejemplo, si el precio de una mercancía en un país determinado baja rápidamente con el tiempo, esto indica que tienen una cantidad excesiva de una mercancía, es decir, que un precio que caiga rápidamente es un indicador de que existe mucha mercancía en el país correspondiente. Entonces, el factor de ganancia $H_0(\vec{n})$ describe con precisión cómo cambia con el tiempo el precio en el país ubicado en \vec{n} .

Si usamos estas ideas, podemos definir $J_0(\vec{n}) \equiv qH_0(\vec{n})$, que describe cuánta mercancía se encuentra en el país en \vec{n} . La constante de proporcionalidad q es necesaria para describir cómo se relacionan las cantidades dadas de mercancía (por ejemplo, 1 tonelada, 2 litros, 5 metros cúbicos) con cambios específicos del precio $H_0(\vec{n})$.

Contrario al caso anterior, si el precio en un país es mucho más alto que en un país vecino, podemos suponer que tienen un desabasto de mercancía y, por lo tanto, hay una entrada neta de mercancía. De esta manera, una diferencia de precio en los países vecinos es un indicador de que la mercancía fluye del país de precio más bajo al país de precio más alto. La diferencia de precios entre el país en \vec{n} y su vecino $\vec{n} + \vec{e}_i$ se describe de manera similar por $H_i(\vec{n})$ y, por ende, usamos $J_i(\vec{n}) \equiv qH_i(\vec{n})$ para describir el flujo de mercancía de \vec{n} a su vecino $\vec{n} + \vec{e}_i$.

Como interludio, hemos introducido al momento una notación matemática para describir un modelo de juguete¹ del mercado financiero. De igual modo, podemos escribir reglas específicas que describen cómo se comporta el sistema. Es necesario contar con dos tipos de reglas. Por un lado, es necesario tener reglas que describan cómo aparecen y evolucionan las oportunidades de arbitraje con el tiempo. Por otro lado, necesitamos reglas que describan cómo se comportan los operadores y, en particular, cómo reaccionan ante la presencia de oportunidades de arbitraje. Estas reglas se abordarán en la siguiente sección.

3.4. Dinámica de arbitraje

Es posible considerar varios tipos de dinámicas dentro de nuestro modelo de juguete del mercado financiero. Sin embargo, diferentes tipos de dinámicas requieren diferentes tipos de leyes de movimiento. En esta sección discutimos un conjunto muy particular de reglas que corresponden a lo que se conoce como ecuaciones de Maxwell.

Anteriormente hicimos la suposición fundamental de que la mercancía que estamos considerando se conserva, es decir, no se destruye ni se produce dicha mercancía durante el proceso. En particular, esto significa que cada vez que la cantidad del producto disminuye en un país determinado, debe haberse ido a alguna parte. Por el contrario, cada vez que aumenta la cantidad del producto en un país, debe haber venido de alguna parte. Podemos expresar esto como:

¹En física, un modelo de juguete es un modelo matemático de un sistema existente con el número más bajo de elementos a considerar de acuerdo al sistema.

cambio de producto en el país \vec{n} = flujo total

En términos matemáticos, esto es:

$$J_0(\vec{n} + \vec{e}_0) - J_0(\vec{n}) = - \left(\sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n} - \vec{e}_i) \right),$$

donde realizamos la suma sobre todos los países vecinos. Podemos reescribir esta expresión como:

$$J_0(\vec{n} + \vec{e}_0) - J_0(\vec{n}) + \left(\sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 J_i(\vec{n} - \vec{e}_i) \right) = 0, \quad (3.29)$$

y podemos visualizar esta ecuación como se muestra en la Figura 3.17.

En el límite continuo, la ecuación (3.29) se convierte en la ecuación de continuidad,

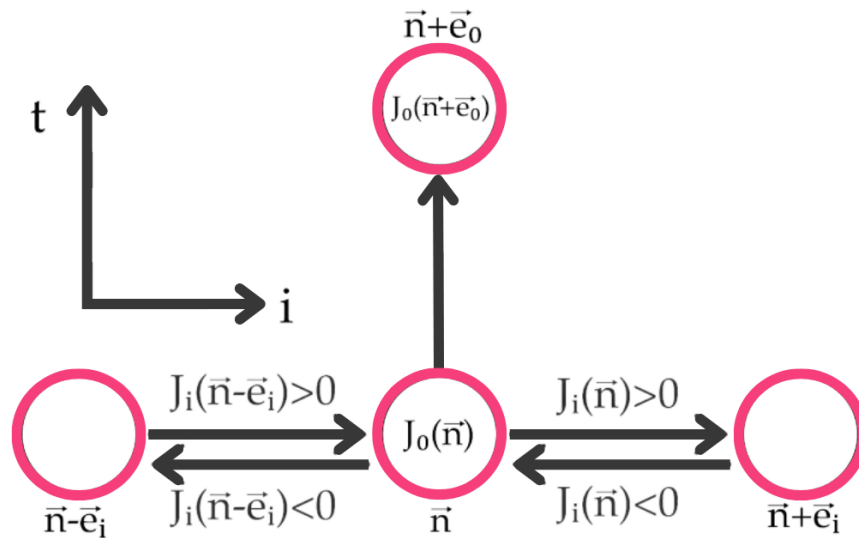
$$\partial_0 J_0 + \sum_{i=1}^2 \partial_i J_i = 0,$$

$$\sum_{\mu=0}^2 \partial_\mu J_\mu = 0,$$

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \quad (3.30)$$

Queremos una ecuación que permita comprender cómo aparecen y evolucionan dinámicamente las oportunidades de arbitraje. Además, ya sabemos que J_μ y $F_{\mu\nu}$ son buenas cantidades para describir nuestro sistema, ya que no dependen de las convenciones locales. Las cantidades J_μ contienen información sobre las posiciones y el flujo del producto en consideración, mientras que $F_{\mu\nu}$ representan

Figura 3.17: Conservación del producto.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

oportunidades de arbitraje. Sin embargo, la primera conjetura ingenua para escribir $F_{\mu\nu}$ en un lado y J_μ en el otro lado de la ecuación falla, porque J_μ tiene solo un índice pero $F_{\mu\nu}$ tiene dos. Sin embargo, hay otra pieza de información que podemos usar la ecuación (3.30).

Si al tomar una derivada del lado derecho de una ecuación se obtiene cero, el lado izquierdo también tiene que ser cero. Sin embargo, no hay ninguna razón *a priori* por la que $\partial_\mu F_{\mu\nu}$ deba anularse, lo que demuestra que la primera suposición es incorrecta.

La observación crucial es que

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

$$\partial_\nu \partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.31)$$

ya que es $F_{\mu\nu}$ antisimétrico con respecto al intercambio de índices, pero $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$. Esto sugiere que debemos intentar

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu, \quad (3.32)$$

en esta expresión, donde introducimos la constante de proporcionalidad μ_0 que codifica con qué intensidad reacciona el patrón de oportunidades de arbitraje ante la presencia y el flujo de un producto.

Esta ecuación tiene exactamente un índice libre (μ) en ambos lados y, lo más importante, ambos lados dan cero si calculamos la derivada

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} &= \mu_0 \partial_\mu J_\mu, \\ 0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

siendo la expresión (3.32) lo que se conoce como la ecuación inhomogénea de Maxwell.

Para el sistema discreto que se hemos propuesto, ésta se lee

$$\sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{\mu\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) = \mu_0 J_\mu(\vec{n}). \quad (3.34)$$

Además, la ecuación (3.34) con $\mu = 0$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{0\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) &= \mu_0 J_0(\vec{n}) \\ \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n}) - \sum_{i=1}^2 F_{0i}(\vec{n} - \vec{e}_i) &= \mu_0 J_0(\vec{n}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde usamos que $F_{00}(\vec{n}) = 0$, ya que $F_{\mu\nu}$ es antisimétrico. Con ello, tenemos que $\mu_0 J_0(\vec{n})$ en el lado derecho es proporcional a la cantidad del producto de nuestra elección ubicado en \vec{n} . Así, para $\mu = 0$, la ecuación (3.32) nos da información sobre el patrón de tipos de cambio en un país en el que está presente nuestro producto. En el límite continuo, la ecuación (3.35) se convierte en

$$\partial_i F_{0i} = \mu_0 J_0, \quad (3.36)$$

que se conoce como ley de Gauss.

De manera similar, para $\mu \in \{1, 2\}$ en la ecuación (3.34), obtenemos las ecuaciones que nos dan información sobre el patrón de tipos de cambio que están presentes siempre que el producto fluya,

$$\sum_{\nu=0}^2 F_{i\nu}(\vec{n}) - \sum_{\nu=0}^2 F_{i\nu}(\vec{n} - \vec{e}_\nu) = \mu_0 J_i(\vec{n}). \quad (3.37)$$

En el límite continuo, esta ecuación se convierte en

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_j F_{ij} = \mu_0 J_i, \quad (3.38)$$

conocida como la ley de Ampere-Maxwell.

Además de la ecuación de Maxwell no homogénea en la expresión (3.32), tenemos la ecuación de Maxwell homogénea

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (3.39)$$

Esta ecuación se sigue automáticamente de la definición del factor de ganancia $F_{\nu\lambda}$ en términos de los tipos de cambio A_μ .

$$\begin{aligned}
 & \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} \\
 &= \partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) \\
 &= \partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda \\
 &= \partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda \partial_\mu A_\nu + \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda \\
 &= \cancel{\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu} - \cancel{\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu} + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda} - \cancel{\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu} + \cancel{\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu} - \cancel{\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda} \\
 &= 0. \checkmark
 \end{aligned}$$

A continuación, describimos las reglas de comportamiento de los operadores del mercado financiero en nuestro modelo.

3.4.1. Dinámica de comerciantes

Dentro de mercado de divisas, podemos tener dos panoramas para los comerciantes. En el primero, existen oportunidades de arbitraje, mientras que en el segundo, no las hay. Podemos comenzar describiendo ese segundo escenario ¿cómo se comportarán los comerciantes si no hay oportunidades de arbitraje? No es posible dar una respuesta concreta a esta cuestión, pues la psicología individual de cada comerciante es demasiado compleja y no es posible conocer todos los factores posibles que influyen en sus decisiones. Pero esto no significa que no podamos describir cómo se mueven los comerciantes a través de nuestro sistema. De hecho, muchos de los avances importantes de la física moderna son métodos

para describir sistemas sin conocer todos los detalles.

Teniendo en cuenta que uno de los principales objetivos de los economistas es producir teorías del comportamiento humano que pasen por alto los detalles de la psicología individual, debemos reconocer que, en un nivel “microscópico”, hay una cantidad increíblemente grande de factores que influyen en las decisiones de cada comerciante todo el tiempo. Esta situación es análoga a lo que sucede con los granos de polen en el agua. Estos granos chocan constantemente con las moléculas de agua, pero no hay forma de que podamos describir todas las moléculas de agua que influyen en los granos de polen. Si ignoramos este nivel microscópico y nos alejamos, nuestros granos de polen simplemente realizan caminatas aleatorias. Por lo tanto, nuestra hipótesis de trabajo será que los comerciantes se mueven al azar. Por supuesto, si nos acercamos, podemos deducir cómo reaccionan los comerciantes a las señales individuales (psicología del comportamiento), de forma análoga a cómo podemos deducir cómo los granos de polen chocan con las moléculas de agua individuales.

En realidad esto no nos ayuda, pues hay demasiados factores que influyen en las decisiones de los comerciantes y demasiadas moléculas de agua que chocan con nuestros granos de polen. Desde una perspectiva macroscópica, la hipótesis del camino aleatorio es realmente lo mejor que podemos hacer. Por lo tanto, lo que necesitamos es una ecuación que describa a nuestros comerciantes ambulantes aleatorios. Dado que no estamos haciendo ninguna suposición especial, la ecuación que buscamos es exactamente la misma ecuación que describe los granos de polen en el agua.

Esta ecuación describe objetos que se mueven aleatoriamente, es conocida como

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.40)$$

donde ρ es la densidad de probabilidad de la cantidad que queremos describir y D es una constante conocida como constante de difusión.

Anteriormente, dijimos que $J_0(t, x)$ nos dice cuánto producto se encuentra en una ubicación particular. Pero ahora, asumimos que nuestros comerciantes lo mueven al azar. Esto significa que necesitamos describir nuestro modelo en términos probabilísticos.

Para entender lo que esto significa, imaginemos que existe solo una unidad del producto considerado. Nuestro objetivo es describir cómo se mueve esta unidad. En este caso, necesitamos hacer una descripción usando la densidad de probabilidad. Por ejemplo, podemos imaginar que en un momento $t = 0$, la función $\rho(t, x)$ es exactamente uno para una ubicación particular x_0 :

$$\rho(t_0, x_0) = 1, \quad 0 \text{ en caso contrario.} \quad (3.41)$$

En otras palabras, esto significa que estamos 100 % seguros de encontrar nuestra unidad de producto en $t = t_0$ en la ubicación x_0 .

En un punto posterior en el tiempo $t = t_1$, la densidad de probabilidad posiblemente se representa como:

$$\rho(t_1, x_0) = 0.1$$

$$\rho(t_1, x_1) = 0.2$$

$$\rho(t_1, x_2) = 0.7$$

$$\rho(t_1, x) = 0 \quad \text{para todas las demás ubicaciones de } x. \quad (3.42)$$

Esto significa que tenemos un 70 % de certeza de encontrar la unidad de producto en la ubicación x_2 , un 20 % de certeza de encontrarla en x_1 y solo un 10 % seguro de encontrarlo en x_0 . Formulado de otra manera, si preparamos el sistema muchas veces, esperamos encontrar nuestra unidad de producto al momento t_1 en x_2 en el 70 % de los casos, en x_1 en el 20 % de los casos y en x_0 sólo en el 10 % de los casos. Más aún, no esperamos encontrarlo en ningún otro lugar. De manera similar, si hay múltiples unidades del producto en el sistema, $\rho(t, x)$ nos dice cómo esperamos que se distribuyan por todo el sistema.

Resumiendo, J_0 nos indica cuánto producto se encuentra en un lugar en particular. Ahora, usamos ρ para describir cuánto producto podemos esperar encontrar en un lugar en particular si repetimos nuestro experimento varias veces. Este cambio a una perspectiva probabilística es necesario porque asumimos que nuestros comerciantes mueven el producto al azar en el mercado. Si bien no podemos estar seguros de lo que sucederá en el futuro, podemos hacer predicciones probabilísticas.

Para llegar a la hipótesis del camino aleatorio de la ecuación (3.40), como anteriormente hicimos, centrémonos en una unidad de nuestro producto de elección. En cada paso de tiempo Δt , la ubicación de la unidad x cambia en un paso l de acuerdo a

$$x(t + \Delta t) = x(t) + l(t). \quad (3.43)$$

Nuestra tarea es escribir una ecuación que nos permita calcular la densidad de probabilidad $\rho(x, t + \Delta t)$ dada la densidad de probabilidad en un paso de tiempo anterior $\rho(x', t)$. Luego, podemos comenzar con una densidad específica en un

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

punto en el tiempo (por ejemplo, uno en el que toda el producto se encuentra en un punto en particular) y calcular cómo se distribuye a través del sistema. Si una unidad de producto se mueve de x en el tiempo t a x' en el tiempo $t + \Delta t$, debe haber movido un paso $l = x - x'$. Podemos preguntarnos ¿cuál es la probabilidad de que dé ese paso?

Para responder a esta pregunta, es necesario introducir la distribución de probabilidad de nuestra caminata aleatoria. Para ello, denotamos la distribución de probabilidad que nos dice la probabilidad de cada paso posible como $\chi(l)$. En particular, $\chi(l_s)$ nos dice la probabilidad de que nuestra unidad de producto avance un paso específico l_s .

La probabilidad de encontrar nuestra unidad de producto en la posición x al tiempo $t + \Delta t$ es, por lo tanto,

$$\rho(x, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', t) \chi(x - x') dx' \quad (3.44)$$

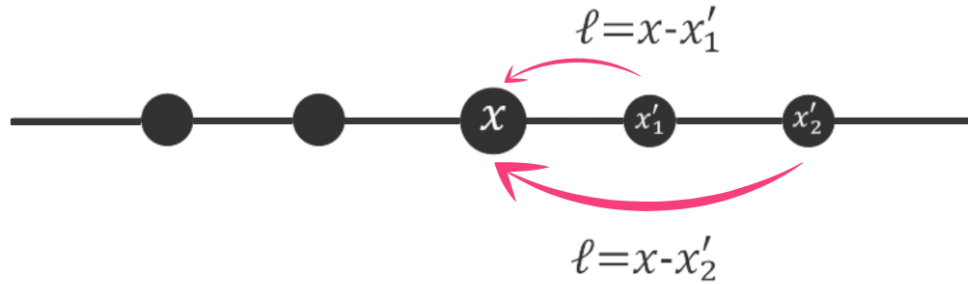
$$(3.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - l, t) \chi(l) dl, \quad (3.46)$$

donde sumamos sobre todas las ubicaciones anteriores posibles x' . Es decir, esta fórmula significa que sumamos sobre todas las posibilidades cómo nuestra unidad de producto puede terminar en x al tiempo $t + \Delta t$. En principio, podemos llegar a x desde cualquier lugar x' . Pero debemos tener en cuenta que el paso de x' a x solo ocurre con una cierta probabilidad, como lo indica $\chi(x - x')$. Más aún, la densidad de probabilidad que indica qué tan probable es encontrar nuestra unidad en la posición x' al tiempo t es $\rho(x', t)$. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar la unidad en x al tiempo $t + \Delta t$ viene dada por la suma de todas las ubicaciones posibles x' en t ponderado por los valores de densidad de probabilidad que nos dicen qué tan probable es que realmente fuera en x' y que el paso de x'

a x sucede.

Figura 3.18: Posición de un producto.



Elaboración propia, con base en Schwichtenberg (34).

Ahora necesitamos hacer algunas suposiciones sobre $\chi(l)$ para poder avanzar. Si bien no necesitamos especificar la distribución de probabilidad $\chi(l)$ en sí, debemos hacer una suposición sobre la media y la desviación estándar de los pasos l . A partir de la media y la desviación estándar, podemos decir qué tan lejos de su posición original podemos esperar encontrar cada unidad dada de plata. Pero como no queremos destacar ninguna dirección en particular, asumimos que la probabilidad de que los pasos en cada dirección sean iguales. Esto implica que la media de l es cero porque los pasos hacia la izquierda ocurren en promedio con la misma frecuencia que los pasos hacia la derecha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} l\chi(l)dl = 0. \quad (3.47)$$

Pero, por supuesto, no estamos asumiendo que nuestro producto no se mueve en absoluto. Una media de cero solo implica que los pasos en cada dirección ocurren con la misma probabilidad. Esto también significa que la desviación estándar es distinto de cero:

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

$$\int_{-\infty}^{\infty} l^2 \chi(l) dl = a. \quad (3.48)$$

La desviación estándar codifica información sobre la distancia total que se mueve cada unidad de producto en promedio a cada paso. La constante a es una constante que depende del sistema en cuestión y, por lo general, debe determinarse experimentalmente. En otras palabras, a es simplemente el nombre que le damos a la desviación estándar. Además, $\chi(l)$ tiene que estar correctamente normalizada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(l) dl = 1. \quad (3.49)$$

Este requisito asegura que las probabilidades para todos los pasos posibles sumen $100\% = 100 \frac{1}{100} = 1$. Con estas fórmulas a la mano, podemos reescribir la ecuación (3.46). La idea crucial es que observamos el sistema desde lejos y, por lo tanto, el tamaño del paso es pequeño en comparación con la escala en la que ρ varía notablemente. Además, asumimos que las operaciones ocurren mucho más rápido que la escala de tiempo en la que observamos ρ . Esto nos permite expandir por Taylor $\rho(x - l, t)$:

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - l, t) \chi(l) dl \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x, t) - l \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \chi(l) dl \\ &\approx \rho(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(l) dl - \frac{\partial \rho}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} l \chi(l) dl + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} l^2 \chi(l) dl \\ &\approx \rho(x, t) + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Además, asumimos que todas las operaciones ocurren mucho más rápido que la escala de tiempo en la que observamos ρ . Esto nos permite usar Taylor en el lado izquierdo de $\rho(x, t + \Delta t)$,

$$\rho(x, t + \Delta t) \approx \rho(x, t) + \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.51)$$

Usando la ecuación (3.50) y la ecuación (3.51), tenemos

$$\begin{aligned} \rho(x, t) + \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \rho(x, t) + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \Delta t \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx \frac{a}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde, en el último paso, introducimos la constante de difusión $D \equiv \frac{a}{2\Delta t}$. Esta es exactamente la ecuación de difusión (3.40) que queríamos derivar. Por lo tanto, hemos demostrado que la ecuación de difusión nos permite predecir en términos probabilísticos cómo se mueve nuestro producto si los comerciantes actúan al azar. Ahora, podemos continuar y pensar en cómo podemos incorporar a nuestra ecuación la información de cómo reaccionan los comerciantes ante las oportunidades de arbitraje.

3.4.2. Dinámica de comerciantes y arbitraje

Una oportunidad de arbitraje es una forma sin riesgos de ganar dinero. Entonces, cada vez que aparece una oportunidad de este tipo en el mercado, está claro que esto provocará un cambio en nuestros comerciantes. Entonces, debemos buscar cómo incorporar este efecto en la ecuación de difusión.

La observación principal es que tan pronto como haya oportunidades de arbitraje, debemos ser más cuidadosos cuando calculamos la derivada. Cuando calculamos la derivada de una función, comparamos los valores de la función en dos

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

lugares diferentes. Esto sigue si recordamos la definición habitual de una derivada en términos de un cociente de diferencias

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.53)$$

Pero cada vez que hay una oportunidad de arbitraje, necesariamente hay un tipo de cambio no trivial A_μ en alguna parte. Por lo tanto, comparar los valores de una función en dos ubicaciones diferentes no es sencillo. Necesitamos tener en cuenta el tipo de cambio A_μ entre las dos ubicaciones. De lo contrario, estamos comparando manzanas con naranjas (por ejemplo, pesos con yenes).

Afortunadamente, ya sabemos cómo hacer esto. La idea que necesitamos es exactamente la misma que ya se utilizó en la ecuación (3.25). Nuestro objetivo era comparar los precios de un producto previamente seleccionado en dos lugares diferentes y encontramos

$$J_\mu(\vec{x}) = q[\varphi(\vec{n} + \vec{e}_\mu) - \varphi(\vec{n}) - A_\mu(\vec{n})], \quad (3.54)$$

que en el límite continuo se convierte en

$$J_\mu(\vec{x}) = q(\partial_\mu \varphi(\vec{x}) - A_\mu(\vec{x})), \quad (3.55)$$

porque los dos primeros términos dan un cociente de diferencia.

Así es como, en general, se ve la derivada de una función en presencia de tipos de cambio no triviales $A_\mu(\vec{x})$. Es convencional llamar a esto la *derivada covariante*,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - A_\mu(\vec{x}). \quad (3.56)$$

En otras palabras, esto significa que necesitamos ajustar los valores de la función usando el tipo de cambio apropiado. Esto ya es todo lo que necesitamos saber. Para obtener la ecuación correcta que describe a nuestros operadores del mercado en presencia de tipos de cambio no triviales, simplemente tenemos que reemplazar la derivada ordinaria ∂_μ con la derivada covariante D_μ .

Concretamente, la ecuación de difusión en presencia de oportunidades de arbitraje es

$$D_t J_0(t, x) = D D_x^2 J_0(t, x),$$

o, explícitamente,

$$(\partial_t - A_t(t, x)) J_0(t, x) = D(\partial_x - A_x(t, x))^2 J_0(t, x), \quad (3.57)$$

donde D sigue siendo la constante de difusión mientras que D_x y D_t denotan las derivadas covariantes.

Para describir cómo se comportan los comerciantes cuando existen oportunidades de arbitraje, simplemente tenemos que tener en cuenta constantemente los tipos de cambio no triviales. Hacemos esto reconociendo que cada vez que calculamos la derivada de alguna función, necesitamos incluir el tipo de cambio apropiado. Esto es necesario porque cuando calculamos una derivada, estamos evaluando la función en dos lugares diferentes. Esto nos lleva a la conclusión de que necesitamos reemplazar nuestras derivadas ordinarias con derivadas covariantes $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, donde $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$. Si hacemos esto, automáticamente terminaremos con las ecuaciones correctas.

Recapitulando, analizamos por qué es útil la simetría de *Gauge*. Pensando en

3. INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL MERCADO FINANCIERO

dicha simetría, entendemos qué cantidades son independientes de las convenciones locales. En segundo lugar, derivamos la ecuación correcta que describe la interacción entre el flujo de bienes o productos y las oportunidades de arbitraje utilizando las ideas de que debemos describir el sistema con cantidades invariantes de Gauge, que el producto considerado se conserva y que los comerciantes se mueven aleatoriamente en ausencia de riesgo, menos oportunidades de ganar dinero.

El modelo de juguete que aquí presentamos es tan solo un ejemplo de cómo las teorías de Gauge son útiles en la descripción del mercado de divisas. En el siguiente capítulo discutimos el marco más general del modelado del mercado financiero mediante las teorías de Gauge en el contexto de haces fibrados en el arbitraje de divisas.

Capítulo 4

Arbitraje de divisas

El arbitraje de divisas es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia entre los precios entre los diferentes mercados sobre una misma moneda para obtener un beneficio económico de esta diferencia (8).

Existen diferentes tipos de dinámicas dentro del mercado de divisas. Por ello, necesitamos diferentes leyes que nos describan dichas situaciones. En este Capítulo abordaremos el arbitraje de divisas desde la perspectiva de las leyes de Maxwell y la estructura matemática en la que se establecen sus simetrías basados en el libro *Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-Equilibrium Pricing* de Ilinski Kirill (16).

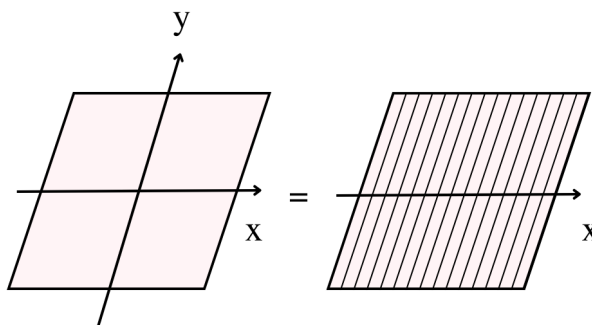
4.1. Haces fibrados

Los haces fibrados nos permiten tener una visión generalizada sobre los espacios. Una forma de visualizar los haces fibrados de manera intuitiva e informal se muestra en Figura 4.1. Esta imagen consiste en pensar que cada haz fibrado consta de subespacios o fibras, los cuales son idénticos y se juntan o “pegan” para formar el espacio completo. Para ilustrar este concepto, pensemos en un plano bidimensional. El espacio es el plano, aquel al que estamos acostumbrados

4. ARBITRAJE DE DIVISAS

a trabajar. Sin embargo, el plano también se puede construir a base de una colección de líneas unidimensionales, las cuales se colocan en la superficie y luego se fijan junto con el eje A . Cada una de las líneas unidimensionales es idéntica a las demás desde un punto de vista geométrico, pero difieren en su posición sobre el eje A .

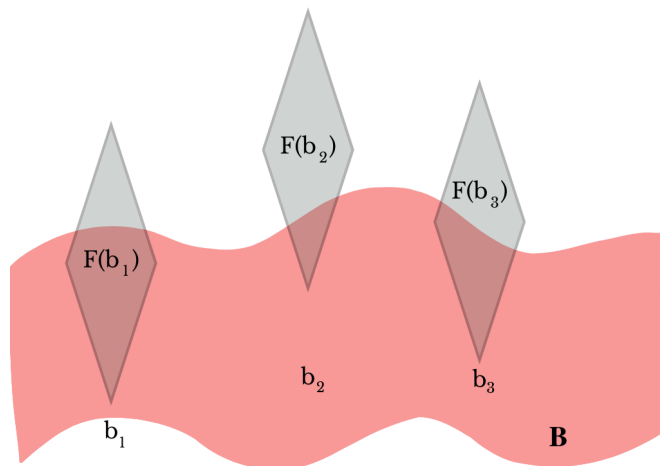
Figura 4.1: Plano bidimensional, donde el eje es la base, y las líneas ortogonales a él son las fibras.



Elaboración propia con base en Kirill (16).

Los subespacios idénticos se denominan fibras y el subespacio que las une se denomina base. De manera general, cualquier haz fibrados E consta de una base B y fibras F idénticas que se sujetan a cada punto de la base como se muestran en Figura 4.2 para hacer un paquete.

Figura 4.2: Un haz libre general, consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B .



Elaboración propia con base en Kirill (16).

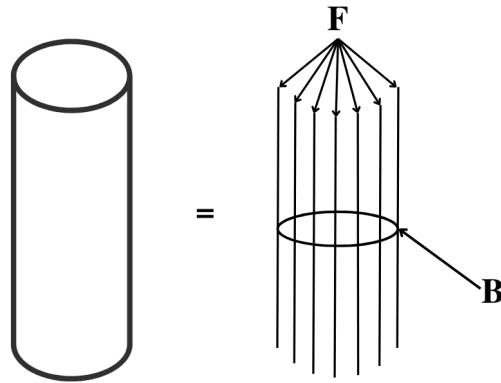
Dado que para definir una posición se necesita ahora definir una posición en la base y luego en la fibra, la dimensión del haz de fibras E es igual a la suma de las dimensiones de la base y las fibras, es decir:

$$\dim E = \dim B + \dim F.$$

Una posición en el haz de fibras se define mediante un par de coordenadas (b, f) donde f da la posición en la fibra y b da la ubicación de la fibra. En ocasiones la base y las fibras son de diferente naturaleza y conviene separarlas en la descripción. Un ejemplo que nos ayuda a entender este concepto se muestra en la Figura 4.3. En esta imagen podemos observar que en lugar de un plano, podemos considerar un tubo, y vemos que aunque las fibras siguen siendo las mismas líneas unidimensionales, la base es un círculo. Esto implica que las coordenadas son bastante diferentes, pues una coordenada en la línea va de menos infinito a más infinito, mientras que una coordenada en el círculo va de 0 a 2π , y el punto

2π se identifica con 0.

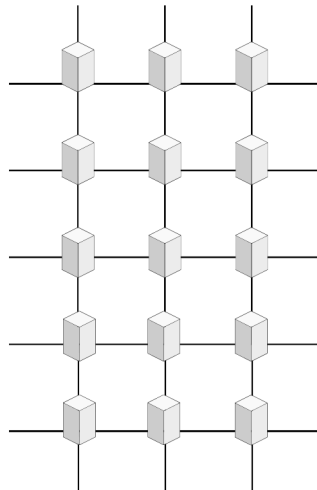
Figura 4.3: Un tubo puede considerarse como un haz de fibras con base circular B y fibras lineales E . De forma alterna, también es posible verse como un haz de fibras con base lineal y fibras circulares.



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

La separación entre las fibras es determinada por las características particulares del problema. Si se trata de un sistema que posee grados de libertad tanto internos como externos, la descripción del haz de fibras aparecerá de forma natural. Un buen ejemplo para ilustrar este concepto es pensar en una ciudad perfecta como la que se observa en la Figura 4.4. Esta ciudad está hecha con edificios de pisos idénticos en los nodos de una red cuadrada en un plano, y cada bloque tiene diez pisos con un apartamento piso en cada piso. Al escribir una dirección en un sobre, el remitente debe escribir la dirección de la forma “Esquina de la calle 6, Avenida 43, Apartamento 5”. Este apartamento está guardado en el bloque, y juega el papel del grado de libertad interno.

Figura 4.4: Un haz libre general consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B .



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

Todo este conjunto de edificios crea una estructura tridimensional, pero preferimos separar las coordenadas geográficas de las coordenadas internas. Si es posible encontrar un sistema de coordenadas global, el haz de fibras correspondiente se llama trivial. No todos los haces fibrados son triviales.

4.2. Transporte Paralelo

Hasta ahora, hemos considerado los haces fibrados como construcciones geométricas globales, pero si se quisiera analizar cantidades locales y comparar cuadrantes entre sí, sería necesario una “conexión”, la cual juega un papel fundamental en la geometría diferencial local.

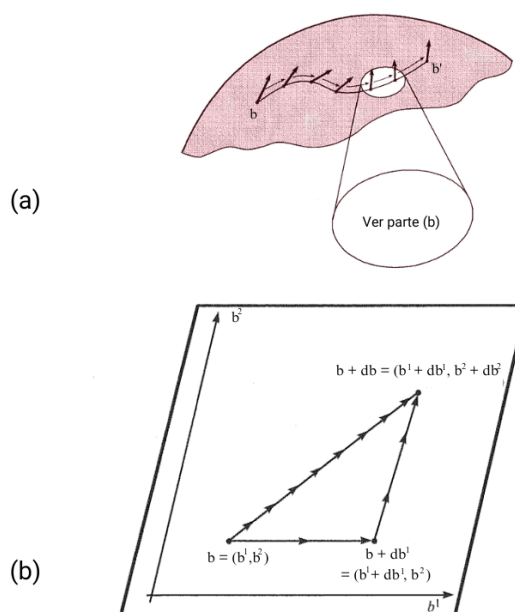
Imaginemos que observamos una partícula, la cual se mueve en un haz fibrado E . La partícula puede moverse dentro de una fibra así como entre las fibras, de

modo que su posición puede describirse mediante dos conjuntos de números, b y f . El conjunto b representa las coordenadas de la partícula en la base E , mientras que el conjunto f denota las coordenadas de las partículas en la fibra $F(b)$ correspondiente al punto b . Dejando a un lado el tema de las coordenadas en la base, podemos hacernos la pregunta “¿Qué pasa si las coordenadas en diferentes fibras no se ajustan entre sí?” En este caso, el cambio de coordenadas no dirá nada sobre el cambio real de la posición de la partícula, que se caracteriza por un cambio en las coordenadas “reales”.

Para ejemplificar lo anterior, podemos regresar a la ciudad perfecta planteada anteriormente, la cual se ilustra en la Figura 4.4. Pensemos en una persona dueña de un edificio en la esquina de la calle 6 y la avenida 48 de manera arbitraria decide numerar los pisos comenzando del sexto al décimo porque quiere que su edificio sea el más alto de la ciudad, si bien esto no hace que el edificio sea más alto en términos reales, para esta persona el décimo piso suena mejor que el quinto. Esto causará problemas a un repartidor que tiene un paquete para el quinto piso, a menos que se dé cuenta de que esto en términos de numeración significa el décimo piso. El repartidor deberá luego ajustar el sistema de coordenadas local. Sin este ajuste, nadie puede comparar si el tercer piso de un edificio o el cuarto piso de otro edificio es más alto. El hecho de que el número 4 sea más grande que el número 3 no significa todavía que este primer piso se encuentre realmente más arriba. La pregunta “¿Cuánto más alto?” no tiene sentido hasta que definamos una regla para la comparación. Esta regla de comparación se llama “conexión”, pues dice que al cambio aparente asociado con el cambio “real” cero le tenemos que restar del cambio total en las coordenadas para obtener la diferencia “real”. El cambio aparente está determinado únicamente por el reajuste de coordenadas en las diferentes fibras.

Una partícula no puede saltar de forma arbitraria de un punto a otro. De forma más precisa, se mueve a través del espacio, mediante una serie de pasos infinitesimales. Es decir, basta con definir la regla de comparación para los puntos cercanos y después sumar las diferencias si se tienen que considerar puntos distantes (ver Figura 4.5). Una razón importante para definir objetos locales en lugar de tratar con objetos globales es que de esta forma tenemos una descripción para cambios locales pequeños, mientras que las construcciones globales son mucho más complejas. Esto nos deja con el campo de conexión local. El campo de conexión, también conocido como campo de Gauge, se define para todos los puntos de la base y da la amplitud de las diferencias entre los sistemas de coordenadas de las fibras “pegadas” a puntos infinitesimalmente cercanos de la base.

Figura 4.5: (a) Cualquier transporte paralelo global se construye a partir de una serie de transportes locales, (b) Cada uno de los transportes paralelos locales es aproximadamente el resultado de los transportes paralelos a lo largo de las direcciones principales en la base.



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

El campo de Gauge es un campo vectorial y tiene tantas componentes como el número de coordenadas independientes en la base. Se debe recalcar que para cada dirección independiente en la base, se debe proporcionar un criterio de comparación independiente para los sistemas de coordenadas de dos puntos cercanos a lo largo de esa dirección. Al querer comparar marcos de coordenadas de diferentes fibras en puntos muy cercanos, el ajuste del marco puede considerarse como una composición de ajustes del marco a lo largo de direcciones independientes principales como se muestra en la Figura 4.5 (b). Si las direcciones están etiquetados por $i = 1, \dots, \dim B$ y los puntos sobre la base están parametrizados por las coor-

denadas b^i , decimos que la transición del punto b al punto $b + db$ se puede realizar mediante una serie de transiciones a lo largo de las direcciones independientes: el cambio a lo largo de la primera dirección db^1 seguido por el cambio a lo largo de la segunda dirección en db^2 , y así sucesivamente.

En pocas palabras, para encontrar el ajuste $\Delta F(b)$ entre los sistemas de coordenadas de las fibras $F(b)$ y $F(b + db)$, hay que calcular el producto escalar de la diferencia entre los puntos de la base, db , y el campo de Gauge

$$\Delta F(b) = db \cdot AF = \sum_{i=1}^{\dim B} A^i F(b) \cdot db^i. \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) define el resultado en términos de los componentes. Aquí la componente A^i es una transformación del sistema de coordenadas que hace que se ajusten los sistemas de coordenadas de $F(b)$ y $F(b + db^i)$. En el caso de la persona que cambió la numeración de los pisos de un edificio, la transformación será la suma del número 5, de modo que $\Delta F(b) = 5$.

Como se muestra en la Figura 4.5, la comparación de dos objetos distantes depende de la ruta tomada entre ellos en la base B . Una curva y el campo de conexión a lo largo de la curva juntos producen un transporte paralelo a lo largo de la curva. Si uno considera las coordenadas de dos elementos de las fibras pegadas a dos puntos distantes, las compara usando el campo de conexión y alguna curva, y no encuentra una diferencia, entonces podemos decir que el segundo elemento es el resultado del transporte paralelo del primer elemento a lo largo de esa curva. Esto implica que la diferencia en las coordenadas es puramente el resultado del desajuste de los marcos de coordenadas, y la diferencia covariante a lo largo de la curva es cero. Pero, si los objetos no están conectados por transporte paralelo a lo largo de una curva, existe una diferencia covariante distinta de cero a lo largo

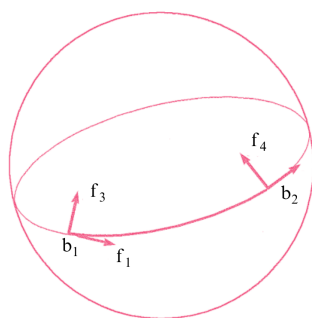
4. ARBITRAJE DE DIVISAS

de la curva.

Tomemos nuevamente el ejemplo de la ciudad perfecta, este mundo perfecto será el haz fibrado y definimos las siguientes reglas de transporte paralelo. El haz fibrado está formado por base esférica y las fibras, que son planos bidimensionales tangentes pegados a cada punto de la esfera. Las reglas del transporte paralelo a lo largo de grandes círculos son las siguientes (ver Figura 4.6):

1. Si el vector f_i es tangente a la circunferencia en el punto b_1 , se transporta al vector f_2 tangente a la circunferencia en el punto b_2 .
2. Si un vector f_3 es ortogonal a la circunferencia en el punto b_1 , se transporta al vector f_4 ortogonal a la circunferencia en el punto b_2 .

Figura 4.6: Reglas para el transporte paralelo sobre la esfera. La conexión definida por estas reglas es especial: es consistente con la métrica de la esfera, inducida por la incrustación en el espacio tridimensional.



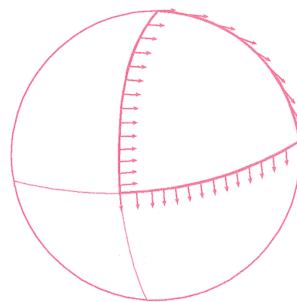
Elaboración propia con base en en Kirill (16).

Cualquier trayectoria en la esfera se puede descomponer en una serie de fragmentos muy pequeños de grandes círculos y, por lo tanto, el transporte paralelo a lo largo de grandes círculos define el transporte paralelo a lo largo de todas

las curvas posibles. Si el vector original no es exactamente paralelo u ortogonal al círculo, primero debe presentarse como una suma de componentes paralelos y ortogonales, de modo que el resultado final sea una suma de los componentes después del transporte paralelo.

En la Figura 4.7 se muestra un ejemplo de transporte paralelo a lo largo de un circuito cerrado compuesto por tres segmentos de grandes círculos. Podemos observar que el transporte paralelo de un vector a lo largo del bucle rota el vector 90° . Este es el resultado estricto de nuestra definición de transporte paralelo. De hecho, esto es una consecuencia de la definición de transporte paralelo y la geometría del haz fibrado subyacente. En la siguiente sección se verá que las mismas reglas aplicadas al caso donde la base es un plano en lugar de una esfera no dará ninguna rotación. Dado que el plano es una esfera con radio infinito y, por lo tanto, curvatura cero, podemos conjeturar que la curvatura tiene algo que ver con el comportamiento sorprendente.

Figura 4.7: Un haz libre general consta de una base B y fibras F unidas a cada punto de B .



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

4.3. Curvatura

Cuando se definieron las reglas generales para el transporte paralelo, no se consideraron los resultados del transporte paralelo a lo largo de dos curvas diferentes aún con los mismos puntos finales serán diferentes. Incluso si nos preocupamos por esto y por encontrar una unión suave tal que los transportes paralelos a lo largo de dos curvas den el mismo resultado, a menudo es una tarea imposible. Y el origen de esta imposibilidad radica en la geometría del haz fibrado.

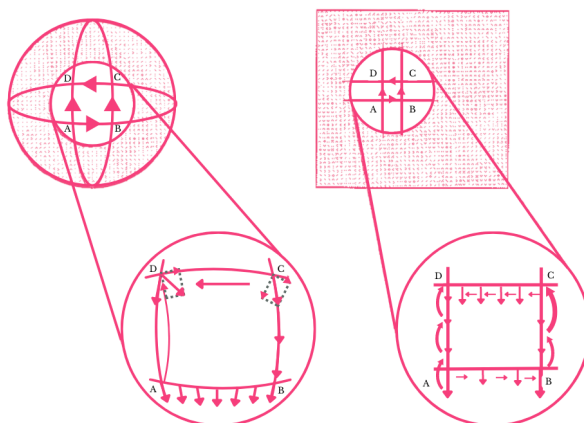
Tomemos el ejemplo del transporte paralelo a través del haz fibrado de Peacetal World (ver Figura 4.6). Si en lugar de dibujar un gran triángulo esférico como se hizo en la Figura 4.7, dibujamos un rectángulo esférico formado por cuatro grandes círculos (Figura 4.8), el objetivo es comparar los resultados del transporte paralelo a lo largo de la curva ABCD ya lo largo de la curva AD. En la Figura podemos notar que los resultados son diferentes. Para entender el origen de la diferencia, se muestran también los resultados del transporte paralelo para el caso de una base plana. Es fácil comprender a simple vista que son los bordes curvos del rectángulo esférico son los responsables de la diferencia covariante distinta de cero. La diferencia covariante se hará cada vez más pequeña a medida que el radio R de la esfera tiende a infinito. Más precisamente, la diferencia covariante disminuirá cuando R se multiplique por el área de superficie del rectángulo o, en general, el área de superficie limitada por las dos curvas. Esto explica nuestra observación anterior sobre la Figura 4.8: la superficie del triángulo esférico es igual a $(4\pi R^2)/8$, lo que da una diferencia covariante de:

$$\frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$

que encontramos anteriormente usando un enfoque gráfico. En geometría, R^{-2} se

conoce como curvatura gaussiana \mathfrak{R} de la esfera.

Figura 4.8: La curvatura esférica es responsable del transporte paralelo no trivial. Las mismas reglas de transporte paralelo aplicadas al caso del avión no producen rotación alguna.



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

La diferencia entre los resultados de dos transportes paralelos a lo largo de los bordes de una superficie muy pequeña es igual al producto de la curvatura gaussiana y el área de superficie encerrada da lugar a la terminología que ahora se usa comúnmente. De acuerdo con esto, la diferencia A entre dos transportes paralelos a lo largo de dos curvas con los mismos extremos sobre una base de algún haz fibrado con alguna conexión se define como igual al producto del área S encerrada por las curvas y la curvatura \mathfrak{R} asociado al haz fibrado asociado con la conexión;

$$\Delta = S\mathfrak{R} \quad (4.3)$$

La curvatura de un haz fibrado se caracteriza por su geometría y, por lo tanto, es un objeto muy útil para el estudio y las aplicaciones.

4.4. Electrodinámica Financiera

Para aplicar las ideas de haces fibrados al mercado de divisas, comencemos denotando el tipo de cambio de dólares a euros por $F(t)$ en el momento t , las tasas de interés serán r_1 y r_2 respectivamente. Suponiendo que toda la información relevante que puede afectar los tipos de cambio entre t y $t + dt$, es conocida y además que $F(t)$ y $F(t + dt)$ se interrelacionan. Es fácil encontrar que esta interrelación se puede expresar mediante una ecuación simple:

$$F(t)(1 + r_2) = F(t + dt)(1 + r_1) \quad (4.4)$$

Pensemos qué sucede si el lado derecho de la relación es mayor que el lado izquierdo, esto implicará una respuesta del “dinero inteligente”, es decir, tomará prestados euro en el momento t , los cambiará inmediatamente por dólares, depositará los dólares hasta el momento $t + dt$ a la tasa de interés r_1 y luego los volverá a cambiar a euros. La situación en la que el lado derecho de (4.4) es mayor que el lado izquierdo garantizará una ganancia sin riesgo de la transacción de arbitraje descrita anteriormente. Sin embargo, esta situación no durará mucho: dado que pocos vendedores optarán por vender dólares en el momento t y pocos compradores optarán por comprar dólares en el momento $t + dt$ a precios iniciales, los tipos de cambio cambiarán hasta que se regrese la igualdad (4.4). También es fácil asegurarse de que el lado izquierdo de (4.4) no pueda permanecer más grande que el lado derecho durante mucho tiempo. Por lo tanto, la ecuación expresa la condición de ausencia de arbitraje. Sin embargo, aquí estamos más interesados en el proceso de restauración que en la ecuación (4.4) en sí.

El proceso de relajación de la ecuación (4.4) llevará algún tiempo, cuya duración está determinada por la liquidez del mercado, así como por las imperfec-

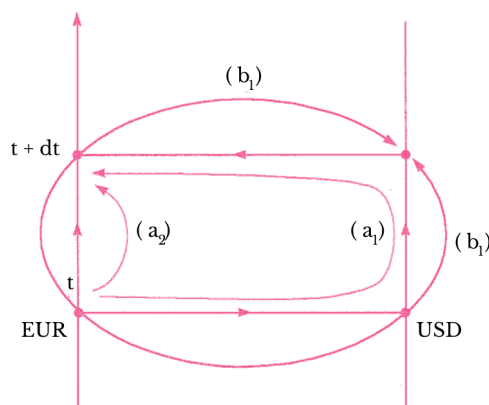
ciones del mercado, como los costos de transacción y el diferencial entre oferta y demanda. Los mismos factores definirán la velocidad del ajuste de precio. Por ejemplo, la relajación es más rápida cuando la desviación de un precio equilibrado es grande (lo que atrae a un gran número de arbitrajistas a pesar de los costos de transacción) en comparación con los casos en que las desviaciones son pequeñas y los costos de transacción hacen que las transacciones sean rentables solo para los grandes arbitrajistas.

4.4.1. Arbitraje como curvatura

Los rendimientos obtenidos debido al arbitraje por la manipulación de precios siempre están asociados con el flujo de activos a lo largo de dos rutas diferentes que tienen un comienzo y un final comunes. En el ejemplo anterior, hemos comparado la ruta (a_1) , es decir, euros en el momento $t \rightarrow$ dólares en el momento $t \rightarrow$ dólares en el momento $t + dt \rightarrow$ euros en el momento $t + dt \rightarrow$, con la ruta (a_2) , es decir, euros en el momento $t \rightarrow$ euros en sintonía $t + dt$ (Figura 4.9). Los rendimientos obtenidos de estas dos rutas de transacciones se expresan mediante (4.4), asumiendo que no hay arbitraje. De manera similar, un par de rutas (b_1) y (b_2) pueden introducirse que comiencen y terminen en dólares.

4. ARBITRAJE DE DIVISAS

Figura 4.9: Dos formas desde euros en el tiempo t a euros en el tiempo $t + dt$. Los diferentes resultados del transporte paralelo a lo largo de las curvas dan lugar a oportunidades de arbitraje.



Elaboración propia con base en en Kirill (16).

En lugar de dos rutas, se puede estudiar una ruta cerrada del flujo de activos. Siguiendo la primera ruta desde el punto de inicio hasta el final, y luego la segunda ruta desde el final hasta el punto de inicio. Para este caso, será un camino cíclico (c), es decir, euros en el momento $t \rightarrow$ dólares en el momento $t + dt \rightarrow$ dólares en el momento $t + dt \rightarrow$ euros en el momento $t + dt \rightarrow$ euros en el momento t . Una vez asignado a cada segmento de este trayecto un respectivo factor de cambio o de interés para ajustar el sistema de coordenadas y habiendo multiplicado estos factores a lo largo del camino y restado uno, obtendremos:

$$R(c) = F^{-1}(t)(1 + r_2)^{-1}F(t + dt)(1 + r_1) - 1 \quad (4.5)$$

cuando es igual a la ganancia descontada de una transacción de arbitraje el dinero sigue la ruta (a_1) y las deudas siguen la ruta (a_2). Además, utilizaremos el término *exceso de rendimiento en la operación de arbitraje* para definir este va-

lor. En la discusión previa de la curvatura se observa que el valor $R(c)$ del exceso de rendimiento en la operación de arbitraje en realidad representa la curvatura asociada con la conexión definida por las tasas de cambio y las tasas de interés. Esta es una observación muy importante.

Teniendo un camino cíclico (c) , hay otro camino cíclico $(-c)$, que se deriva de (c) cambiando la dirección del flujo. Este camino también puede ser descrito por una ecuación:

$$R(c) = F^{-1}(t)(1 + r_2)F^{-1}(t + dt)(1 + r_1)^{-1} - 1. \quad (4.6)$$

Esto es igual al retorno descontado en una operación de arbitraje cuando el dinero sigue la ruta (b_1) , y las deudas siguen la ruta (b_2) . Combinando (4.5) y (4.5), se puede obtener la siguiente ecuación:

$$R = R(c) + R(-c). \quad (4.7)$$

Definiendo una oportunidad para realizar una determinada operación de arbitraje rentable. La cantidad R no es negativa y es igual a cero solo si no hay arbitraje. En este caso, (4.4) es equivalente a la ecuación $R = 0$. Es más conveniente usar la cantidad R en lugar de (4.5) y (4.6) por separado, especialmente cuando no queremos especificar qué operación en particular es rentable. Incluso, no importa qué operación en particular sea rentable: si una operación genera pérdidas, la operación opuesta genera ganancias. Por lo tanto, la cantidad R caracteriza la existencia de arbitraje sin especificar una operación de arbitraje particular. La introducción de la notación R en (4.7) no es accidental. La cantidad R está directamente relacionada con la curvatura del haz fibrado financiero. En el caso de la electrodinámica, R es igual a la energía del campo electromagnético. Esto nos acerca a la analogía electrodinámica.

Capítulo 5

Casos de estudio

En este Capítulo se abordan los principales artículos en forma cronológica relacionados con la aplicación de la teoría de Gauge en el ámbito financiero, específicamente en el mercado de divisas.

La idea de tratar el mercado de divisas desde un punto de vista de simetrías y de la teoría de Gauge se presenta por primera vez en la tesis doctoral de Malaney “*The index number problem: a differential geometric approach*” en 1996. En este trabajo de investigación, se demuestra que las simetrías y la teoría de Gauge pueden ser usadas en la economía. Esto con base en parte en el trabajo conjunto con Weinstein (21).

Para el año de 1997, Ilinski y Kalinin se enfocan en utilizar la teoría de Gauge de arbitraje en la fijación de los precios de derivados. Para ello, realizaron un análisis de Black-Scholes para demostrar cómo estos aparecen a partir de la teoría de Gauge. Además, derivan la corrección de la ecuación de Black-Scholes debido a un arbitraje virtual y la reacción de los especuladores. Todos los resultados mostrados en el artículo fueron obtenidos de forma analítica. Sin embargo, hacen mención al hecho de cualquier desarrollo posterior a sus resultados crearían cálculos complejos que tendrían que ser tratados de forma numérica. Este hecho

ya ha sido tratado en artículos de investigación recientes como se abordará en este Capítulo posteriormente (17).

Al siguiente año, Didier Sornette publica el artículo “*Gauge theory of Finance?*” en el cual habla sobre la propuesta de Ilinski y Kalinin. Dentro de sus conclusiones, realizó la observación sobre cómo la distribución logarítmica normal y las ecuaciones de Black-Scholes no son prueba de la corrección de la teoría ni de su relevancia. También sugiere que la existencia de incertidumbre es responsable de las oportunidades de arbitraje “virtuales”, pero en el caso de un mercado completo, las variables aleatorias tienen las propiedades de una caminata aleatoria de Markov, que implica la inexistencia de oportunidades de arbitraje (Sornette, 1998).

Ilinski, siguiendo la línea de investigación sobre la teoría de Gauge aplicada a la economía, en el artículo “*Gauge Physics of Finance: simple introduction*”, establece los principios fundamentales del enfoque del uso de la teoría de Gauge para la economía financiera y muestra las diferentes opciones de aplicación de la misma. Ilinski consideró el modelado de procesos de fijación de precios reales para un índice de mercado S&P500, además de analizar los precios derivados y la teoría de la cartera. Concluye con un algoritmo para construir un modelo de fijación de precios de un instrumento concreto en el marco del enfoque de la teoría de Gauge (38).

En 1999, K. Young en su artículo “*Foreign exchange market as a lattice gauge theory*” sugiere una analogía entre un modelo sencillo para describir el mercado de divisas y la teoría de Gauge. En este trabajo de investigación, Young propone que los tipos de cambio corresponden a los exponenciales de los potenciales de

5. CASOS DE ESTUDIO

Gauge definidos en bucles espaciales, mientras que las tasas de interés están relacionadas con los potenciales de Gauge en bucles temporales. Young considera que las oportunidades de arbitraje están dadas a través de los valores distintos de cero del tensor de campo de Gauge invariante o bien por la curvatura definida en bucles cerrados. Para el caso de arbitraje donde se involucran cambios cruzados en un instante, el tiempo se relaciona como análogo con “campos magnéticos” mientras que el arbitraje para mercado de futuros se relacionan con “campos eléctricos”. En este primer trabajo se ofrece una perspectiva distinta para analizar el mercado de divisas. Aunque es un modelo sencillo que no refleja el verdadero comportamiento de un mercado financiero, se rescata el hecho de tener un modelo simplificado, el cual permite centrarse en conceptos base para construir modelos de mayor complejidad y que permitan posteriormente describir casos reales (41).

“*Gauge Geometry of Financial Markets*” es otro trabajo de Ilinski publicado en el 2000. En ese artículo, Ilinski demuestra que los mercado financieros cuentan con una estructura geométrica subyacente intrínseca, es decir, una geometría de haz fibrado. Al contar con esta estructura en el trabajo, se formula una simetría de Gauge local de reescalado de unidades de activos en términos geométricos. Al considerar esto durante la construcción del modelo, proporciona a la economía financiera una metodología física, lo cual es un aporte valioso para el área (15).

Kholodnyi, al igual que Ilinski, ha sido uno de los autores que han hecho aportaciones de gran relevancia en el área. Entre 2002 y 2003, publicó los artículos “*Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in a General Market Environment based on the Beliefs-Preferences Gauge Symmetry*” (20), “*Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in the Framework of the*

Beliefs-Preferences Gauge Symmetry” (20) y *“Beliefs-Preferences Gauge Symmetry and Dynamic Replication of Contingent Claims in a General Market Environment”* (19). Como principal aporte, se tiene una perspectiva de la simetría de Gauge desde un tipo creencias-preferencias. Otro aporte importante de Kholodnyi es la fijación de precios de opciones europeas para mercados generales, cuya dinámica de precios no está necesariamente descrita por los procesos de Markov.

“Time and symmetry in models of economic markets” discute diferentes temas económicos de una forma alternativa, esto con la finalidad de analizar el modelado de mercados económicos. Para ello, Smolin comienza describiendo el modelo básico de equilibrio de Arrow-Debreu. En este apartado, se centran en el tratamiento del tiempo y la contingencia. Posteriormente se discute el concepto de “simetría”; una vez desarrollado este concepto, el autor llega a la conclusión de que lo que se necesita es una teoría dinámica y de no equilibrio de los mercados económicos por medio del modelo de Debreu. Dando una analogía con el protagonismo de la mecánica estadística en la física, se sugiere que esto podría llamarse “economía estadística”. Para esto, propone abordar la economía desde una perspectiva de la teoría de Gauge, tal como lo propusieron originalmente Malaney y Weinstein (36).

Samuel E. Vázquez y Simone Farinelli, en el trabajo *“Gauge Invariance, Geometry and Arbitrage”* publicado en 2009, identifican la medida más general de arbitraje para cualquier modelo de mercado regido por procesos de *Itô*, es decir, procesos que pueden ser una función de una variable estocástica y del tiempo. En este artículo se demuestra que la medida de arbitraje propuesta es invariante bajo cambios de *numéraire* y medida de probabilidad equivalente. Esta medida tiene una interpretación geométrica como conexión de Gauge. Samuel y Simon resaltan que la conexión tiene curvatura cero sí y solo si no existe arbitraje. Además, de-

5. CASOS DE ESTUDIO

muestran una generalización simple del teorema clásico de valoración de activos para considerar la presencia de arbitraje. Sumado a esta primera parte, los autores presentan un algoritmo básico para medir la curvatura del mercado utilizando datos financieros. Gracias a este algoritmo, encontraron evidencia de fluctuaciones en la curvatura distintas de cero en datos de alta frecuencia relacionados con índices bursátiles e índices de futuros (40).

En “*Toward a Geometric Formulation of Triangular Arbitrage – An Introduction to Gauge Theory of Arbitrage*”, artículo cuyo autor es Yoshiyuki Morisawa, se considera la cartera de bonos, acciones y opciones europeas. Por ello, introduce la dependencia temporal adecuada mediante precio del bono, el cual crece exponencialmente con un interés constante, así como el precio de las acciones que evoluciona según el movimiento browniano. Además, se asume que el precio de la opción es una función arbitraria, la cual satisface una condición de contorno correspondiente al pago de la opción. Finalmente, se incluye la dependencia del tiempo del campo de Gauge y se determina como funcional. Con ello se espera que se obtenga un precio de opción razonable como se obtiene mediante Black-Scholes (25).

Sokoloc y Melatos, en su artículo de 2010 “*A note on the theory of fast money flow dynamics*”, realizan una crítica a la teoría de la dinámica del flujo rápido de dinero, presentada por Didier Sornette. En dicho trabajo, se demuestra que la elección de los parámetros de entrada utilizados por Ilinski, en “*Physics of finance: gauge modeling in non-equilibrium pricing*” da como resultado oscilaciones sinusoidales del tipo de cambio. Con ello, se crea un conflicto con los resultados presentados en dicho trabajo de Ilinski. Sokoloc y Melatos encontraron que la dinámica predicha por la teoría es generalmente inestable en la mayoría de las

situaciones reales, con el tipo de cambio tendiendo a cero o infinito exponencialmente. La teoría de los flujos rápidos de dinero está basada en una forma particular del hamiltoniano, el cual describe el efecto del tipo de cambio. Los autores demuestran que esta forma no es consistente con la formulación de Gauge de lattice y diverge en el límite continuo (37).

Dentro de la misma propuesta de Ilinski “*Gauge Invariant Lattice Quantum Field Theory: Implications for Statistical Properties of High Frequency Financial Markets*”, se menciona que el uso de la teoría de Gauge es muy importante de la dinámica del mercado. Sin embargo, este podría no ser el el único principio de física que podría ser usado para el modelado el mercado. Particularmente, se podría implementar condiciones de contorno en el modelo de *lattice*. Esta propuesta es interesante debido al potencial de hacer predicciones de futuras distribuciones de ganancias, pues aunque los precios a largo plazo no se pueden predecir, sí es posible trabajar sobre la evolución temporal de su distribución de probabilidad a corto plazo (9).

“*An Application of Symmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance*” es un trabajo de investigación en el que se analiza el modelo de fijación de precios de los derivados financieros en un mercado financiero mediante el uso de la simetría de Gauge. Para ello, los autores lo reescriben como una ecuación diferencial parcial en un haz fibrado en forma diferencial covariante para tener invariancia en la forma. Demostrando que la ecuación de precios puede mantenerse invariante bajo todas las transformaciones numerarias locales, se revela esta simetría detrás de la ecuación de precios de los derivados. Shipeng Zhou y Liqing Xiao concluyen con la relación existente entre geometrización del modelo de precios con la simetría de Gauge, la conexión, la curvatura y una forma más uni-

5. CASOS DE ESTUDIO

forme de la ecuación de precios, mencionando que la introducción a la economía de este enfoque es natural y su extensión potencial es posible (42).

Juan Maldacena, investigador del *Institute for Advanced Study* de Princeton, publicó en 2015 el artículo titulado “*The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson*”. En este trabajo, Maldacena describe las ideas teóricas desarrolladas entre 1950 y 1970 que fueron usadas como base para la predicción de la existencia del bosón de Higgs, partícula que fue descubierta en 2012. En este artículo, explica que las fuerzas de la naturaleza están basadas en el principio de simetría de Gauge. Lo interesante de este trabajo es el hecho de que hace una analogía de estas simetrías con respecto al comportamiento del mercado de divisas, tomando como referentes los trabajos de Young ((41)). Además, agrega un apéndice matemático donde describe de una forma cuantitativa la analogía entre la simetría y economía (22).

En 2015, Simone Farinelli publica su trabajo titulado “*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*”, en el cual integra la teoría clásica de las finanzas estocásticas dentro de un marco de geometría diferencial llamado “Teoría del Arbitraje Geométrico”. En esa publicación, Farinelli demuestra que es posible parametrizar estrategias de arbitraje por su holonomía, así como dar al Teorema Fundamental de Valoración de Activos una caracterización homotópica diferencial. También, toma la dinámica del mercado como la solución de las ecuaciones estocásticas de Euler-Lagrange para una elección del Lagrangiano. Esto permite expresar el principio de mínima acción de Hamilton como el principio de arbitraje mínimo esperado, es decir, una extensión del principio de no arbitraje. Con lo anteriormente mencionado, el autor proporciona soluciones explícitas de equilibrio y no equilibrio para un mercado cerrado (12).

“*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*” y “*Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics*” son dos trabajos de investigación publicados en 2018 y 2019, respectivamente, por Giovanni Paolinelli y Gianni Arioli, en los cuales se destaca el hecho de mostrar un modelo para la dinámica a corto plazo de activos financieros basado en una aplicación a las finanzas de la teoría cuántica de Gauge. Con base en las ideas publicadas por Ilinskiy, abonan al tema un algoritmo numérico para el cálculo de la distribución de probabilidad de precios (28). Además, construyen un modelo para la dinámica de los precios de las acciones basado en una integral de trayectoria no cuadrática, teniendo como resultado un modelo que genera muy buenos ajustes de algunas fluctuaciones de índices y precios de acciones (29).

Es necesario reconocer la tesis de maestría de Nelson Rodrigues (31), donde hace una revisión sistemática de la literatura con respecto a la aplicación de la teoría de Gauge en las finanzas, así como la tesis de Luis Alberto en la cual se analiza el arbitraje de divisas con una perspectiva de teoría de norma (30).

En el libro publicado en 2020 por Jakob Schwichtenberg “*Physics of Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles*” (34), el cual muestra de forma sencilla la conexión existente entre las finanzas y la física. En el libro se propone un “*toy model*” del mercado financiero para explicar teorías fundamentales de la naturaleza como la relatividad general o la electrodinámica. Este autor rescata el avance que se ha realizado entre la relación de la teoría de Gauge y los mercado financieros, citando los trabajos de Ilinski, K. Young y de Juan Maldacena.

5. CASOS DE ESTUDIO

Hecha la revisión literaria, en el siguiente Capítulo describimos la metodología con la que buscamos obtener la veracidad de nuestras hipótesis y alcanzar los objetivos de este trabajo de tesis.

Capítulo 6

Metodología

En este Capítulo describimos el proceso metodológico seguido en la elaboración de este trabajo de investigación.

Anteriormente, presentamos una perspectiva de los mercados financieros desde el punto de vista de la teoría de Gauge y las reglas a seguir para su modelado. Por conveniencia, resumimos dicha información en forma de las ecuaciones que rigen nuestro modelo de juguete del mercado financiero.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{Ley de Gauss,} \\ \nabla \cdot B &= 0 && \text{Ley de Gauss para el campo magnético,} \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} && \text{Ley de Faraday,} \\ \nabla \times B &= \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} && \text{Ley de Ampère,} \\ \nabla \cdot J &= \frac{\partial \rho}{\partial t} && \text{Ecuación de continuidad,} \\ D_t \rho &= -DD_x^2 && \text{Ecuación de Difusión.}\end{aligned}\tag{6.1}$$

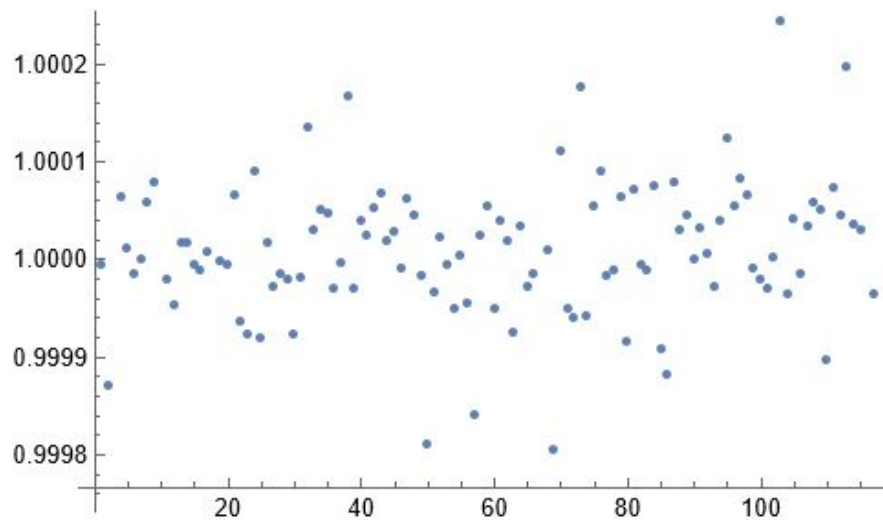
Decidimos trabajar con las divisas euro y dólar. Para ello, creamos una base de datos que permitiera tener los cambios referentes entre estas monedas. Se

6. METODOLOGÍA

tomaron los datos del 1 de enero al 12 de junio del 2023 de la página *Investing*. Esta base se creó mediante *Google Sheets* y posteriormente se guardó en formato *csv*. Los datos fueron procesados en *Mathematica*.

Primeramente, nos interesamos en las ganancias obtenidas considerando el precio de apertura. De los datos registrados, obtenemos la gráfica mostrada en la Figura (6.1)

Figura 6.1: Representación de de las ganancias obtenidas en el periodo del 1 de enero al 12 de junio.



Elaboración propia.

En la Figura 6.1 podemos observar que se obtiene ganancias cuando el resultado es mayor a uno, no se gana ni se pierde si el resultado es justo uno y en caso de ser menor a uno se tienen pérdidas. Una vez que se calcularon estos cambios se procede a trabajar dichos resultados con las leyes de Maxwell.

Capítulo 7

Resultados

Primeramente, aproximamos el mercado financiero con un problema unidimensional, de forma que las ecuaciones se vuelven ($\vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 J \\ \frac{\partial J}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ D_t \rho &= -D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Consideremos una aproximación apagada, donde las reglas del juego se fijan desde el principio y no cambian. Esto nos permite responder dos tipos de preguntas:

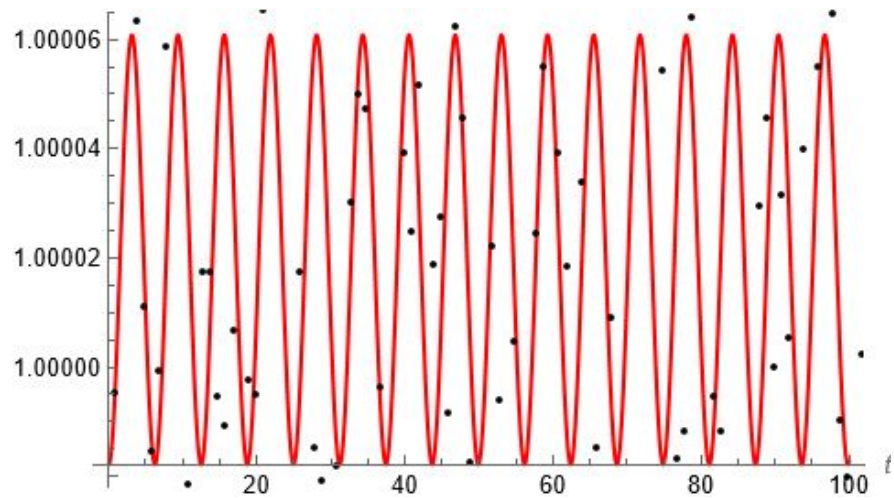
1. Si queremos un comportamiento en la ganancia \vec{E} , ¿cuál debería de ser la dinámica del producto codificada por ρ que haga esto posible?
2. Sí sabemos la dinámica del mercado, parametrizada por ρ , ¿cómo son las ganancias esperadas?

7. RESULTADOS

Con estas ideas, modelamos el mercado de divisas.

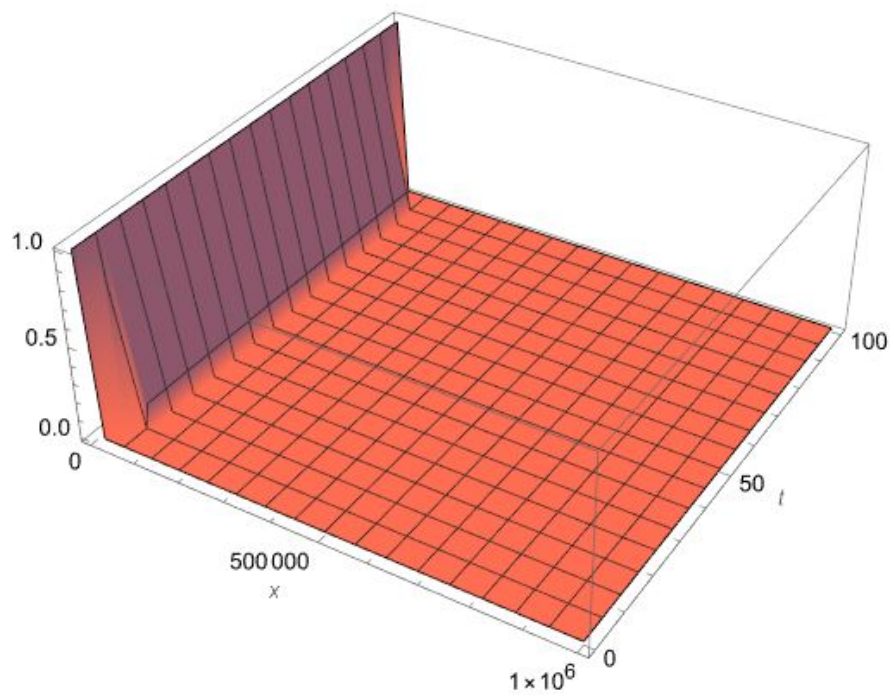
Proponemos un perfil de ganancia tal que esté localizado espacialmente al tiempo $t = 0$, y que nos de una evolución cosenoidal del mercado para $t > 0$, ya sea tendencia a la alza o a la baja, es decir

Figura 7.1: Ajuste cosenoidal a las ganancias obtenidas, con función $Ae^{-x^2}(1 - BCos(c - t))$



Elaboración propia.

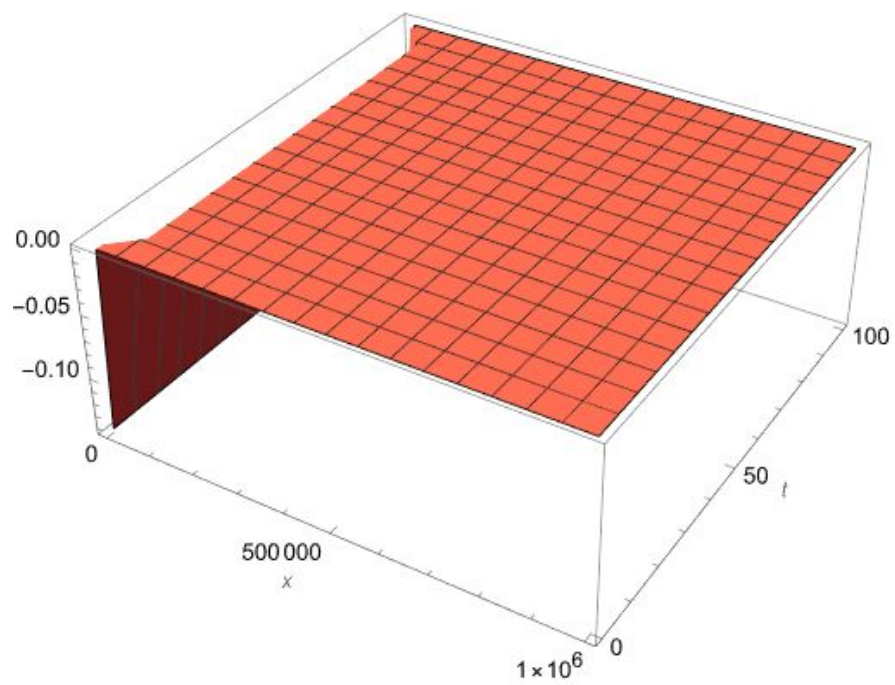
Figura 7.2: Representación de E con la solución $e^{-x^2}(1 - 0.00004\text{Cos}(0.036 - 1.007t))$



Elaboración propia.

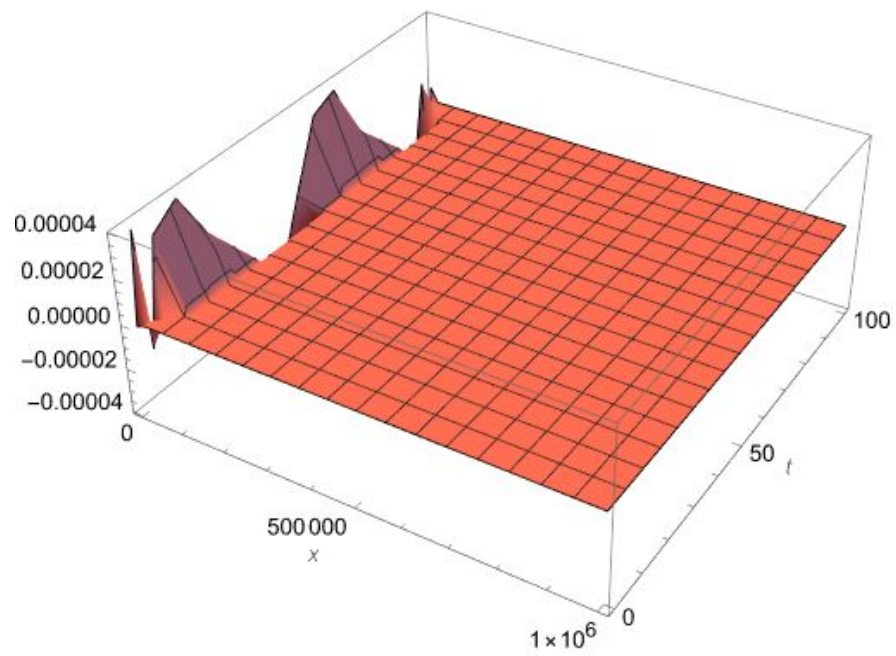
7. RESULTADOS

Figura 7.3: Representación de ρ con $-2e^{-x^2}(1 - 0.00004\text{Cos}(0.036 - 1.007t))$.



Elaboración propia.

Figura 7.4: Representación de J con $-0.00004e^{-x^2} \text{Sin}(0.036 - 1.007t)$.



Elaboración propia.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se modela el comportamiento del mercado de divisas visto desde un punto físico, específicamente desde las leyes de la electrodinámica y la teoría de norma, como base teórica se presentan distintos trabajos que han utilizado esta metodología desde un punto de vista teórico. Para realizar este modelo matemático, se analizó una conjunto de datos reales del tipo de cambio euro-dólar, posteriormente se calculó las posibles ganancias realizando arbitraje en el tiempo.

Basados en la simetrías se encontró que la dinámica del mercado de divisas se puede modelar como un sistema físico. Esta simetría de norma nos permite incorporar los elementos más importantes del mercado financiero real en términos de ecuaciones bien conocidas en la física. De manera particular, las soluciones a las ecuaciones de Maxwell, lo que permite dar una mejor interpretación de los datos reales para el mercado de Forex. Para el futuro se puede relajar las suposiciones que nos ayudaron a simplificar las ecuaciones e incorporar los efectos de un mercado completamente dinámico para predecir los comportamientos futuros. Se debe enfatizar el hecho de que el modelado realizado funciona para el lapso de tiempo que se analizó pues al ser un mercado tan cambiante este varía con distintos factores económicos, sociales y/o políticos.

Aportaciones

En esta tesis se recopila el avance histórico del uso de la teoría de norma en mercados financieros desde sus orígenes hasta el presente año, además de presentar el arbitraje de divisas y el funcionamiento del mercado de divisas desde una perspectiva económica y física.

Con relación a los resultados obtenidos podemos observar que aunque los modelos matemáticos para el comportamiento del arbitraje no son exactos estos si sostienen el uso de la teoría de norma como una alternativa al análisis econométrico clásico, lo que da una apertura para analizar mercados financieros desde una visión distintas con modelos bien establecidos y que pueden ser adaptados.

Como futuras líneas de investigación se pretende utilizar la ecuación de difusión para obtener predicciones en relación a los tipos de cambios, además de utilizar una mayor cantidad de divisas para hacer arbitraje, así como realizar los cálculos en tiempo real conforme varié el precio de las divisas.

Bibliografía

- [1] Aguirre, M. G. and Chávez, J. C. A. R. (2011). El tipo de cambio real y los regímenes cambiarios en México durante el periodo 1954-2010. *Cimerus*, 6(1):11–26. 14
- [2] Arthur, S. and Sheffrin, S. M. (2003). Economics: Principles in action. *Upper Saddle River, New Jersey*, 7458:173. 4
- [3] BANXICO (s.f.a). ¿qué es el tipo de cambio? http://educa.banxico.org.mx/banco_mexico_banca_central/sist-finc-tipo-cambio.html. Fecha de la consulta: 30/06/2022. 4, 14, 15
- [4] BANXICO (s.f.b). ¿qué son las reservas internacionales? http://educa.banxico.org.mx/banco_mexico_banca_central/reservas-internacionales.html. Fecha de la consulta: 07/01/2022. 9, 14
- [5] Chakraborti, A., Fujiwara, Y., Ghosh, A., Inoue, J.-i., and Sinha, S. (2015). Physicists' approaches to a few economic problems. *Econophysics and Data Driven Modelling of Market Dynamics*, pages 237–286. 1
- [6] Chapoy, A. (1998). Hacia un nuevo sistema monetario internacional. *México, UNAM, Instituto de Investigaciones Económicas y Porrúa Editores*. 9

- [7] de México, G. (1992). Diario oficial de la federación. https://www.dof.gob.mx/index_113.php?year=1992&month=07&day=21#gsc.tab=0. Fecha de la consulta: 29/07/2022. 31
- [8] Diez de Castro, L. and Mascareñas, J. (1994). Ingeniería financiera. 71
- [9] Dupoyet, B., Fiebig, H., and Musgrove, D. (2010). Gauge invariant lattice quantum field theory: Implications for statistical properties of high frequency financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):107–116. 93
- [10] ESPAÑOLA, R. A. (s.f.a). Divisa. <https://dle.rae.es/divisa>. Fecha de la consulta: 07/01/2022. 13
- [11] ESPAÑOLA, R. A. (s.f.b). Moneda. <https://dle.rae.es/moneda>. Fecha de la consulta: 07/01/2022. 6, 13
- [12] Farinelli, S. (2015). Geometric arbitrage theory and market dynamics. *Available at SSRN 1113292*. 94
- [13] Gozalbes, M. (2011). Historia del dinero. *Valencia, Museu de Prehistoria de Valencia*. 4, 5, 6
- [14] Hülsmann, J. G. (2014). Fiat money and the distribution of incomes and wealth. *The Fed at One Hundred: A Critical View on the Federal Reserve System*, pages 127–138. 8
- [15] Ilinski, K. (2000). Gauge geometry of financial markets. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(1):L5. 90
- [16] Ilinski, K. (2001). *Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-Equilibrium Pricing*. WILEY. 71, 72, 73, 74, 75, 78, 80, 81, 83, 86

BIBLIOGRAFÍA

- [17] Ilinski, K. and Kalinin, G. (1997). Black-scholes equation from gauge theory of arbitrage. *arXiv preprint hep-th/9712034*. 89
- [18] Javier, F. F. (2017). El mercado de divisas: ¿qué es y cómo funciona? <https://www.bbva.com/es/mercado-divisas-que-es-como-funciona/>. Fecha de la consulta: 25/07/2022. 11
- [19] Kholodnyi, V. (2001). Beliefs-preferences gauge symmetry and dynamic replication in a general market environment. *Science Direct Working Paper*, (S1574-0358):04. 91
- [20] Kholodnyi, V. (2002). Valuation and dynamic replication of contingent claims in the framework of the beliefs-preferences gauge symmetry. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 27:229–238. 90, 91
- [21] Malaney, P. N. (1997). *The index number problem: a differential geometric approach*. Harvard University. 88
- [22] Maldacena, J. (2015). The symmetry and simplicity of the laws of physics and the higgs boson. *European Journal of Physics*, 37(1):015802. 25, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 94
- [23] Mankiw, N. G. (2020). *Principles of economics*. Cengage Learning. 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
- [24] Martínez, D. M. (2009). El nacimiento del billete: una revolución en el concepto del dinero. *Revista Numismática OMNI*, (1):1–3. 6, 7
- [25] Morisawa, Y. (2009). Toward a geometric formulation of triangular arbitrage—an introduction to gauge theory of arbitrage—. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 179:209–215. 92

- [26] Munim, Z. H. and Schramm, H.-J. (2018). The impacts of port infrastructure and logistics performance on economic growth: the mediating role of seaborne trade. *Journal of Shipping and Trade*, 3(1):1–19. 3
- [27] Nurkse, R. (1944). *International currency experience: lessons of the interwar period*, volume 2. League of Nations. 8
- [28] Paolinelli, G. and Arioli, G. (2018). A path integral based model for stocks and order dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 510:387–399. 95
- [29] Paolinelli, G. and Arioli, G. (2019). A model for stocks dynamics based on a non-gaussian path integral. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 517:499–514. 95
- [30] Ramos Llanos, L. A. and Raya, A. (2022). Oportunidades de arbitraje desde la perspectiva de teorías de norma. *Tesis*. 95
- [31] Rodrigues, N. D. (2019). Application of gauge theory to finance: A systematic literature review. *PQDT-Global*. 95
- [32] Ruiz, J. L. G. (1992). Patrón oro, banca y crisis (1875-1936): Una revisión desde la historia económica. *Cuadernos de estudios empresariales*, (2):57–86. 7, 8
- [33] Schwartz, P. (2001). El comercio internacional en la historia del pensamiento económico. *Documento de trabajo*, 3. 3
- [34] Schwichtenberg, J. (2019). *Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles*. No-Nonsense Books. 25, 28, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 57, 65, 95

BIBLIOGRAFÍA

- [35] Sinha, S. and Chakrabarti, B. K. (2012). Econophysics: an emerging discipline. *Economic and Political Weekly*, pages 44–65. 2
- [36] Smolin, L. (2009). Time and symmetry in models of economic markets. *arXiv preprint arXiv:0902.4274*. 91
- [37] Sokolov, A., Kieu, T., and Melatos, A. (2010). A note on the theory of fast money flow dynamics. *The European Physical Journal B*, 76:637–642. 93
- [38] Sornette, D. (1998). Gauge theory of finance? *International Journal of Modern Physics C*, 9(03):505–508. 89
- [39] Tipler, P. A. and Mosca, G. (2021). *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1: Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*. Reverte. 1
- [40] Vázquez, S. E. and Farinelli, S. (2009). Gauge invariance, geometry and arbitrage. *arXiv preprint arXiv:0908.3043*. 92
- [41] Young, K. (1999). Foreign exchange market as a lattice gauge theory. *American Journal of Physics*, 67(10):862–868. 90, 94
- [42] Zhou, S. and Xiao, L. (2010). An application of symmetry approach to finance: Gauge symmetry in finance. *Symmetry*, 2(4):1763–1775. 94